

I/27

LEITFADEN

DER

ELEMENTAREN MATHEMATIK

VON

ADOLF SICKENBERGER

PROFESSOR AM K. LUITPOLDSGYMNASIUM IN MÜNCHEN.

---

ERSTER THEIL.

ALGEBRA.

---

MÜNCHEN.

THEODOR ACKERMANN

KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER.

1888.

3917e







LEITFADEN  
DER  
ELEMENTAREN MATHEMATIK

VON  
ADOLF SICKENBERGER  
PROFESSOR AM K. LUITPOLDSGYMNASIUM IN MÜNCHEN.

---

ERSTER THEIL.  
ALGEBRA.

---

MÜNCHEN.  
THEODOR ACKERMANN  
KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER.

1888.







# V o r w o r t.

---

Das Buch, welches ich hiemit der Oeffentlichkeit übergebe, hat die Bestimmung, dem Unterrichte in der elementaren Mathematik, wie er an den Gymnasien und Realschulen des Königreichs Bayern erteilt zu werden pflegt, als Grundlage zu dienen. Es soll, wie sein Titel sagt, ein „Leitfaden“ sein, und als solcher weder dem Lehrer vorlehen, noch dem Schüler vordenenken, sondern nur das enthalten, was zur Vorbereitung und Wiederholung sowie zur Ausfüllung entstandener Lücken unentbehrlich ist. Auf eine möglichst gedrängte Darstellungsweise und knappe Form ist daher vor allem Bedacht genommen, nicht minder auf eine thunlichste Beschränkung des Stoffes.

Ferner war ich bemüht, überall den kürzesten einfachsten Weg zu gehen, und alle Ausführungen in einer möglichst anschaulichen, handgreiflichen Form zu geben. Hiebei bin ich mir bewusst, der berechtigten Forderung wissenschaftlicher Strenge sowie dem höheren Standpunkte des Gymnasialunterrichtes in nichts vergeben zu haben, es müsste denn sein, dass man „Wissenschaftlichkeit“ auffasst als die Kunst, eine einfache und in sich klare Sache möglichst unverständlich zu machen.

Im Verfolg dieses Gedankens wahrte ich mir auch möglichst grosse Freiheit in der Form. Weder die Synthesis Euklids noch eine moderne analytisch-genetische Schablone scheinen mir allüberall am Platze, sondern je nach der Natur des Stoffes habe ich jene Darstellung gewählt, welche mir im besonderen Fall für den Unterrichtszweck am passendsten schien. Zudem ist ja die Methode zum geringsten Teil Sache des Lehrbuches sondern vor allem des mündlichen Unterrichts. Erst das gesprochene Wort und die selbständige eigenartige Kunst des Lehrers vermag die toten Gestalten des gedruckten Lehrtextes zu beleben.

Des weiteren strebte ich nach möglichst grosser Übersichtlichkeit in der äusseren Anordnung des Stoffes. So sehr die Mathematik immer als reine Verstandeswissenschaft angesehen und gepriesen wird, so kann der mathematische Unterricht doch eines ziemlich beträchtlichen Gedächtnisstoffes nicht entraten. Es bildet derselbe gleichsam das unentbehrliche Werkzeug für die tägliche Arbeit. Es war mein Bemühen, diesen Gedächtnisstoff nicht nur auf das denkbare Mindestmass einzuschränken



und in möglichster äusserer Kürze darzustellen, sondern auch denselben in einer augenfälligen Form zu geben, welche das Wichtige von dem minder Wichtigen auch äusserlich scheidet.

Die im Buche befolgte Anordnung des Lehrstoffes enthält keine Vorschrift über die Reihenfolge. Die einzelnen Abschnitte sind, soweit es sachlich irgendwie thunlich war, von einander unabhängig gehalten, so dass der Stoff beliebig zerschnitten, und damit besonderer Gewohnheit oder Einzelbedürfnissen durchweg Rechnung getragen werden kann.

Obwohl das Buch zunächst nur Lehr- und nicht Übungsbuch ist, enthält dasselbe doch zahlreiche in den Text eingeflochtene Musterbeispiele. Häufig habe ich auch statt langer allgemeiner, und darum unverständlicher Auseinandersetzungen eine Darstellung an passenden Mustern gewählt. Durch einfache, leicht vorzunehmende Veränderung dieser Musterbeispiele entsteht schon von selbst ein nicht unbeträchtlicher Übungsstoff.

Endlich erlaube ich mir zu betonen, dass das Buch hauptsächlich entstanden ist auf Grund einer nun nahezu zwanzigjährigen Lehrerfahrung an Unterrichtsanstalten der verschiedensten Art. Diese Erfahrung war mir der erste Wegweiser, gegen welchen theoretische Zweifel und systematische Skrupel keine Bedeutung gewannen. Dass aber die neuere reiche pädagogische Literatur nicht unbenützt gelassen wurde, wird man auf jeder Seite des Buches erkennen. Unleugbar ist in den letzten Jahrzehnten in Bezug auf die Methode des mathematischen Unterrichtes ein ganz bedeutender Fortschritt erzielt worden — nicht zum geringsten Teil Verdienst der Hoffmann'schen „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ — und ich hoffe, dass dieser Fortschritt auch in dem hier vorgelegten Buch zu Tage trete. Die zahlreichen, ohnehin allbekannten Herren Verfasser von Lehrbüchern und Artikeln in Fachzeitschriften, deren Arbeiten dankbarst benützt wurden, besonders aufzuführen, dürfte kaum erforderlich sein. Ich folgte dem Grundsatz, das Gute zu nehmen, wo ich es fand. Auf besondere Originalität kann ein derartiger Leitfaden seiner Natur nach ohnehin nur in sehr beschränkten Grenzen Anspruch erheben.

So möge denn meine Arbeit, der schon im Entstehen das Wohlwollen vieler Herren Fachgenossen sehr reichlich zuteil geworden, ihren Weg beginnen! Welches auch das Urteil über dieselbe sein möge, eines wird man mir nicht aberkennen: das redliche Bemühen, beizutragen zur Hebung und Belebung des mathematischen Unterrichtes und damit zur Bildung und Veredlung unserer lieben deutschen Jugend.

München, Ostern 1888.

**Adolf Sickenberger.**



# Erste Abteilung.

## Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten.

### I. Einleitung.

§ 1. Zur Bezeichnung einer Zahl überhaupt — d. h. ohne Rücksicht auf die Menge der Einheiten — bedient man sich der Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets.

Aushilfsweise wird auch das große lateinische oder das griechische Alphabet benützt.

So bezeichnete Zahlen heißen allgemeine Zahlen. Im Gegensatz hiezuhießen die gewöhnlichen mit Ziffern bezeichneten Zahlen besondere Zahlen.

Die Lehre von den allgemeinen Zahlen heißt allgemeine Arithmetik, auch Algebra.

### II. Addition.

§ 2. Die einfachste Verbindung zweier Zahlen ist das Zusammenzählen.

**Begriff.** Addieren heißt zwei Zahlen zusammenzählen. — Die Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen, heißen die Summanden; das Ergebnis heißt Summe.

Zeichen der Addition  $+$  („plus“).

In einer Bank sitzen  $a$  Schüler, in einer andern  $b$  Schüler; in beiden zusammen sitzen  $(a + b)$  Schüler.

§ 3. Aus dem Begriff Addition folgt unmittelbar:

$$a + b = b + a$$

**Satz.** In einer Summe lassen sich die Summanden vertauschen. (2)



Es ist einerlei, ob die  $b$  Schüler der zweiten Bank zu den  $a$  Schülern der ersten Bank hinzutreten, oder umgekehrt.

§ 4. Soll eine Summe  $(a + b)$  zu einer Zahl  $c$  addiert werden, so schreibt man:

$$(a + b) + c.$$

Aus dem Begriffe der Addition folgt unmittelbar:

$$(a + b) + c = (a + c) + b = (b + c) + a.$$

$$\text{Ebenso: } (a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) \\ = (a + d) + (b + c) \text{ u. s. w.}$$

Man schreibt daher einfach ohne Klammern:

$$(a + b) + c = a + b + c.$$

$$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d.$$

**Satz.** Bei der Addition von Summen ist die Reihenfolge der Summanden gleichgültig. (3)

Erläuterung wie in § 2 und § 3.

§ 5. Statt der Summe  $(a + a)$  schreibt man  $(2 a)$ :

$$a + a = 2 a.$$

$$\text{Ebenso: } x + x + x = 3 x.$$

$$5 z = z + z + z + z + z.$$

$$\text{Es ist: } 3 m + 2 m = (m + m + m) + (m + m) \\ = m + m + m + m + m = 5 m.$$

### III. Subtraktion.

§ 6. Durch Umkehrung der Addition entsteht die Subtraktion.

Umkehren heißt das Gesuchte als gegeben annehmen.

**Begriff.** Subtrahieren heißt zu einer gegebenen Summe und gegebenem einen Summanden den andern Summanden suchen. — Die gegebene Summe heißt Minuend, der gegebene Summand heißt Subtrahend, der gesuchte Summand heißt Differenz. (4)

Zeichen der Subtraktion ist — („minus“). Der Minuend steht vor, der Subtrahend nach dem Subtraktionszeichen.

In einer Bank sitzen  $a$  Schüler; es entfernen sich  $b$  Schüler, so verbleiben noch  $(a - b)$  Schüler.

§ 7. Aus dem Begriffe der Subtraktion folgt unmittelbar:

$$(a - b) + b = a.$$



D. h. Die Differenz zum Subtrahenden addiert giebt den Minuenden.

Es ist demnach:

$$(a + b) - b = a. \quad 7a - 4a = 3a. \quad \text{u. s. w.}$$

**§ 8.** Bei der Subtraktion sind drei Fälle zu unterscheiden:

- 1) der Minuend ist größer als der Subtrahend;
- 2) der Minuend ist gleich dem Subtrahenden;
- 3) der Minuend ist kleiner als der Subtrahend.

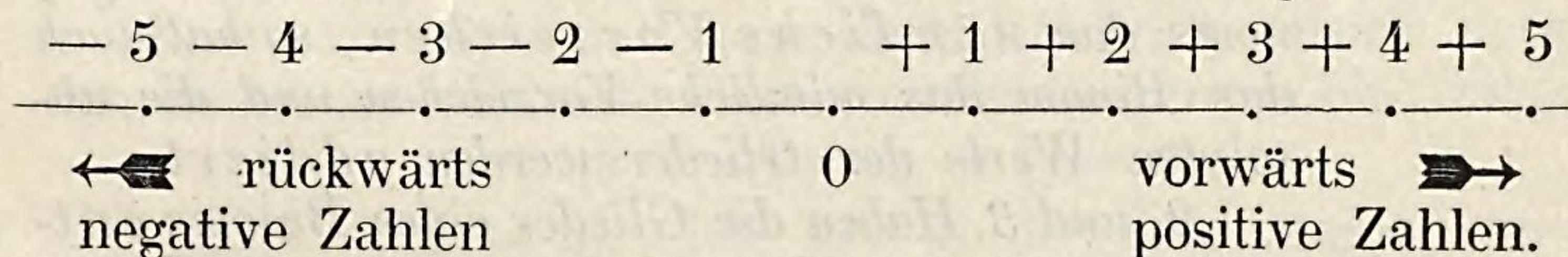
Der erste Fall ist der gewöhnliche. — Um auch den zweiten und dritten Fall zu erledigen, stellen wir uns die Zahlenreihe auf einer graden Linie vor. Der Ausgangspunkt bedeutet die Zahl null (0). Auf der einen Seite (rechts) liegen die Zahlen über null; sie heißen positive Zahlen. Auf der andern Seite (links) liegen die Zahlen unter null; sie heißen negative Zahlen.

Das Addieren ist ein Aufwärtszählen (rechts, vorwärts) in der Zahlenreihe; das Subtrahieren ist ein Abwärtszählen (links, rückwärts) in der Zahlenreihe.

Die positiven Zahlen kann man entstanden denken durch Addition zur Null; sie werden daher bezeichnet durch das Vorzeichen + („plus“).

Die negativen Zahlen kann man entstanden denken durch Subtraktion von der Null; sie werden daher bezeichnet durch das Vorzeichen — („minus“).

Demnach ist das Bild der Zahlenreihe folgendes:



Demnach:

1) Ist der Minuend größer als der Subtrahend, so ist die Differenz über null, positiv.

$$5 - 3 = + 2 = 2$$

2) Ist der Minuend gleich dem Subtrahenden, so ist die Differenz null.

$$4 - 4 = 0$$

3) Ist der Minuend kleiner als der Subtrahend, so ist die Differenz unter null, negativ.

$$2 - 5 = - 3 .$$



Beispiele für den Gegensatz von positiven und negativen Zahlen sind: Steigen und Fallen, Mehrung und Minderung, Zufluß und Abfluß, Gewinn und Verlust, Einnahmen und Ausgaben, Guthaben und Schulden (Soll und Haben).

Eine Eisenbahn steigt um  $25\text{ m}$  und fällt dann um  $30\text{ m}$ ; dies ergibt  $5\text{ m}$  Fall.  $25 - 30 = -5$ .

In einen Behälter fließen  $60\text{ l}$  zu, dagegen fließen  $80\text{ l}$  ab; dies ergibt  $20\text{ l}$  Abfluß.  $60 - 80 = -20$ .

Ein Kaufmann hat  $13\,000\text{ M}$  Guthaben, dagegen  $17\,000\text{ M}$  Schulden; das ergibt  $4\,000\text{ M}$  Überschuldung.  $13\,000 - 17\,000 = -4\,000$ .

Eine Zahl einschließlich ihres Vorzeichens genommen heißt eine algebraische Zahl. Eine Zahl ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen heißt eine absolute Zahl.

**§ 9.** Die einfache Verbindung zweier algebraischer Zahlen heißt ein zweigliedriger Ausdruck oder ein Binom; die beiden algebraischen Zahlen heißen die Glieder.

Das Binom schließt die Formen der Summe und der Differenz als besondere Fälle in sich.

$$\left. \begin{array}{l} 1) + 7 + 3 = + 10. \\ 2) + 7 - 3 = + 4. \\ 3) - 7 + 3 = - 4. \\ 4) - 7 - 3 = - 10. \end{array} \right\}$$

Zu 1) Von  $(+ 7)$  drei Schritte vorwärts:  $+ 10$ .

Zu 2) Von  $(+ 7)$  drei Schritte rückwärts:  $+ 4$ .

Zu 3) Von  $(- 7)$  drei Schritte vorwärts:  $- 4$ .

Zu 4) Von  $(- 7)$  drei Schritte rückwärts:  $- 10$ .

**Satz.** 1. und 4. Haben die Glieder eines Binoms das nämliche Vorzeichen, so hat auch das Binom das nämliche Vorzeichen und die absoluten Werte der Glieder werden addiert. **(5)**

2. und 3. Haben die Glieder eines Binoms entgegengesetzte Vorzeichen, so hat das Binom das Vorzeichen des absolut größeren Gliedes und die absoluten Werte der Glieder werden subtrahiert.

Beispiele: Zu 1)  $8\text{ Grad}$  Erwärmung und  $5\text{ Grad}$  Erwärmung geben  $13\text{ Grad}$  Erwärmung.  $+ 8 + 5 = + 13$ .

Zu 2)  $37\text{ M}$  Einnahmen und  $29\text{ M}$  Ausgaben geben  $8\text{ M}$  Einnahme.  $+ 37 - 29 = + 8$ .

Zu 3)  $26\text{ Schritte}$  rückwärts und  $20\text{ Schritte}$  vorwärts geben  $6\text{ Schritte}$  rückwärts.  $+ 20 - 26 = - 6$ .

Zu 4)  $3\,000\text{ M}$  Schulden und  $2\,000\text{ M}$  Schulden geben  $5\,000\text{ M}$  Schulden.  $- 3\,000 - 2\,000 = - 5\,000$ .



**§ 10.** Auch drei oder mehr algebraische Zahlen können verbunden werden; hiedurch entsteht ein drei- oder mehrgliedriger Ausdruck, Trinom, Polynom oder Aggregat.

1) Es ergibt sich aus der Natur der Sache:

**Satz.** Bei einem Aggregat ist die Reihenfolge, **(6)**  
nach der die einzelnen Glieder verbunden werden, gleichgiltig.

Sind zu machen: a Schritte vorwärts, b Schritte rückwärts, c Schritte rückwärts, d Schritte vorwärts, so kommt man an denselben Endpunkt, in welcher Reihenfolge man auch dies thun mag.

Man schreibt daher ein Aggregat stets ohne Klammern:

$$a - b - c + d.$$

2) Als einfachste Berechnungsweise eines Aggregats empfiehlt sich meistens die Zusammenfassung erst aller positiven und dann aller negativen Glieder.

$$\begin{aligned} a + b - c - d + e - f &= (a + b + e) - (c + d + f). \\ 15 - 13 + 10 - 7 - 4 + 8 \\ &= (15 + 10 + 8) - (13 + 7 + 4) = 33 - 24 = 9. \end{aligned}$$

Der Kaufmann addiert einerseits alle Einnahmen (Guthaben) andererseits alle Ausgaben (Schulden).

**§ 11.** Binome oder Polynome können selbst wieder als Glieder anderer Aggregate auftreten, und als solche entweder mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen sein.

1)  $x + (a - b)$ . Ich soll in der Zahlenreihe von x aus  $(a - b)$  Schritte vorwärts gehen. Ich gehe zuerst a Schritte vorwärts und habe dann b Schritte zurück zu gehen, da ich um b Schritte zuviel vorwärts gegangen bin. Daher:

$$x + (a - b) = x + a - b.$$

2)  $x - (a - b)$ . Ich soll in der Zahlenreihe von x aus  $(a - b)$  Schritte rückwärts gehen. Ich gehe zuerst a Schritte zurück und habe dann b Schritte vorwärts zu machen, da ich um b Schritte zuviel rückwärts gegangen bin. Daher:

$$x - (a - b) = x - a + b.$$

**Satz.** 1) Steht ein Aggregat positiv, so behalten **(7)**  
sämtliche Glieder ihr Vorzeichen.

2) Steht ein Aggregat negativ, so kehren sämtliche Glieder ihr Vorzeichen um.

In diesem Gesetz sind alle Fälle über die Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen eingeschlossen.



Umgekehrt: Werden Glieder eines Aggregats in Klammern gesetzt, so behalten die Glieder ihr Vorzeichen, wenn vor die Klammer das Zeichen plus tritt; sie kehren ihr Vorzeichen um, wenn vor die Klammer das Zeichen minus tritt.

**§ 12.** Auch einzelne algebraische Zahlen können mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen werden. Hiedurch entstehen die sogenannten Doppelvorzeichen.

$$\left. \begin{array}{l} 1) + + a = + (0 + a) = 0 + a = + a. \\ 2) + - a = + (0 - a) = 0 - a = - a \\ 3) - + a = - (0 + a) = 0 - a = - a \\ 4) - - a = - (0 - a) = 0 + a = + a. \end{array} \right\}$$

**Satz. 1. und 2)** Eine algebraische Zahl positiv **(8)** genommen behält ihr Vorzeichen.

3. und 4) Eine algebraische Zahl negativ genommen kehrt ihr Vorzeichen um.

Zu 1) Einnahmemehrung ist Mehrung.

Zu 2) Ausgabenmehrung ist Minderung.

Zu 3) Einnahmeminderung ist Minderung.

Zu 4) Ausgabenminderung ist Mehrung.

Auch drei- und mehrfache Vorzeichen sind hienach leicht zu behandeln:

$$\begin{array}{ll} + + + a = + + a = + a. & + - - a = + + a = + a. \\ + + - a = + - a = - a. & - + - a = - - a = + a. \\ + - + a = + - a = - a. & - - + a = - - a = + a. \\ - + + a = - + a = - a. & - - - a = - + a = - a. \end{array}$$

u. s. w.

## IV. Multiplikation.

**§ 13.** Tritt in einer Summe immer dieselbe Zahl als Summand auf, so haben wir eine neue Rechnungsart die Multiplikation. (Vergl. § 5.)

**Begriff.** Multiplizieren heißt eine Zahl so oft **(9)** als Summand setzen, als es eine andere Zahl angibt. — Die Zahl, welche als Summand gesetzt werden soll, heißt *Multiplikand*; die Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplikand als Summand gesetzt werden soll, heißt *Multiplikator* (auch *Koeffizient*); das Ergebnis der Multiplikation heißt *Produkt*.



Zeichen der Multiplikation  $\cdot$  („mal“). Der Multiplikand steht vor, der Multiplikator nach dem Multiplikationszeichen.

$$a + a + a = a \cdot 3 \text{ [„a mal 3“; eigentlich „a dreimal“]}.$$

**§ 14.** Das Produkt  $(a \cdot b)$  bedeutet  $a$  Einheiten  $b$  mal; dies ist dasselbe als  $b$  Einheiten  $a$  mal. Daher

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**Satz.** In einem Produkt lassen sich Multiplikand und Multiplikator vertauschen. **(10)**

**Begriff.** Multiplikand und Multiplikator haben den gemeinsamen Namen *Faktoren*.

Fünf Reihen von je vier Punkten lassen sich auch ansehen als vier Reihen von je fünf Punkten.

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Die Bezeichnung von Multiplikand und Multiplikator ist daher nicht streng unterschieden. Bei allgemeinen Zahlen bezeichnet man das Produkt durch einfaches Nebeneinanderschreiben:  $ab$ . Besondere Zahlen als Faktoren werden gerne an die Spitze gestellt:

$$a + a + a = a \cdot 3 = 3 a. \quad (\text{Vergl. § 5}).$$

**§ 15.** Soll ein Produkt  $(ab)$  mit einer Zahl  $c$  multipliziert werden, so schreibt man:

$$(a \cdot b) \cdot c \quad \text{oder} \quad ab \cdot c.$$

Nach demselben Gedankengang wie in § 14 ergibt sich

$$ab \cdot c = ac \cdot b = bc \cdot a = abc.$$

**Satz.** Bei der Multiplikation von Produkten **(11)** ist die Reihenfolge der Faktoren gleichgültig.

Man ordne  $b$  Reihen von je  $a$  Punkten und schichte  $c$  solcher Flächen übereinander; dieselben lassen sich dann auch ansehen als  $b$  Flächen von je  $(ac)$  Punkten, oder als  $a$  Flächen von je  $(bc)$  Punkten.

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} ab \cdot cd &= (ab \cdot c) \cdot d = (ab \cdot d) \cdot c \quad \text{u. s. w.} \\ &= ad \cdot bc = bd \cdot ac \quad \text{u. s. w.} \\ &= abcd. \end{aligned}$$

$$4 a \cdot 5 b = 20 ab \quad 7 x \cdot 3 y \cdot z = 21 xyz.$$

**§ 16. Besondere Fälle.**

$$1) \quad 1 \cdot a = 1 + 1 + 1 \dots = a.$$

Dagegen hat das Produkt  $(a \cdot 1)$  eigentlich keinen klaren Sinn, da man eine Zahl nicht einmal als Summand



setzen kann. Einen Sinn erhalten wir erst, wenn wir uns denken:

$$x + a \cdot 1$$

Dies heißt, daß zu der Zahl  $x$  die Zahl  $a$  einmal als Summand hinzugefügt werden solle. Dies ergibt

$$x + a \cdot 1 = x + a \quad \text{d. h.} \quad a \cdot 1 = a.$$

Diese Auffassung zeigt sich auch in Übereinstimmung mit Satz 10.

- 2) Ebenso ergibt sich:  $0 \cdot a = 0 + 0 + 0 \dots = 0$   
und  $a \cdot 0 = 0$ .

**§ 17.** Man schreibt:

$a a = a^2$  „ $a$  zur zweiten Potenz“ oder „ $a$  Quadrat“,

$a a a = a^3$  „ $a$  zur dritten Potenz“ oder „ $a$  Kubus“,

$a a a a a = a^5$  „ $a$  zur fünften Potenz“.

$$x^7 = x x x x x x x.$$

$$p^4 \cdot p^2 = p p p p \cdot p p = p p p p p p = p^6.$$

## **§ 18. Multiplikation algebraischer Zahlen.**

- 1) Algebraische Zahlen als Multiplikanden.

$$(+a) \cdot 3 = +a + a + a = +3a.$$

$$(-a) \cdot 3 = -a - a - a = -3a.$$

• D. h. Das Vorzeichen des Multiplikanden überträgt sich auf das Produkt.

2) Algebraische Zahlen als Multiplikatoren haben aus dem Begriff der Multiplikation keinen unmittelbaren Sinn, indem der Multiplikator eine absolute Zahl sein soll. Der hier unterzulegende Sinn kann jedoch nur der sein, daß sich auch das Vorzeichen des Multiplikators auf das Produkt übertrage. D. h.

$$a \cdot (+b) = +ab. \quad a \cdot (-b) = -ab.$$

Diese Auffassung ist auch in Übereinstimmung mit Satz 10.

**Satz.** Die Vorzeichen der Faktoren übertragen (12)  
sich auf das Produkt.

$$\left. \begin{array}{l} (+a) \cdot (+b) = +ab = +ab. \\ (-a) \cdot (+b) = -ab = -ab. \\ (+a) \cdot (-b) = -ab = -ab. \\ (-a) \cdot (-b) = +ab = +ab. \end{array} \right\}$$

## **§ 19. Multiplikation eines Aggregates mit einer Zahl.**

$$\begin{aligned} (a - b) \cdot 3 &= (a - b) + (a - b) + (a - b) \\ &= a + a + a - b - b - b = 3a - 3b \end{aligned}$$

$$m \cdot (a - b) = (a - b) \cdot m = am - bm.$$



**Satz.** Das Produkt aus einem Aggregat und (13) einer Zahl ist gleich dem Aggregat der Produkte aus jedem Glied des Aggregats und der Zahl.

$$(7 a^2 - 4 a + 5) \cdot 2 a = 14 a^3 - 8 a^2 + 10 a.$$

$$(-5 x) \cdot (-2 y + 3 z) = 10 x y - 15 x z.$$

## § 20. Multiplikation eines Aggregats mit einem Aggregat.

$$\begin{aligned} (a - b)(c - d) &= a(c - d) - b(c - d) \\ &= a c - a d - b c + b d. \end{aligned}$$

**Satz.** Das Produkt zweier Aggregate ist gleich (14) dem Aggregat der Produkte aus jedem Glied des einen Aggregats mit jedem Glied des andern Aggregats.

$$\begin{aligned} (5 x + 3 y - 4 z) \cdot (2 a - 3) \\ = 10 a x + 6 a y - 8 a z - 15 x - 9 y + 12 z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4 a^3 - 5 a^2 + 3 a - 4) \cdot (2 a^2 - 7 a + 1) \\ = 8 a^5 - 10 a^4 + 6 a^3 - 8 a^2 \\ \quad - 28 a^4 + 35 a^3 - 21 a^2 + 28 a \\ \quad + 4 a^3 - 5 a^2 + 3 a - 4 \\ = 8 a^5 - 38 a^4 + 45 a^3 - 34 a^2 + 31 a - 4. \end{aligned}$$

## § 21. Besondere Fälle.

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{Satz.} \quad (a + b)^2 &= a^2 + 2 a b + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2 a b + b^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$2) \quad \text{Satz.} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad (a + b - c - d)^2 &= a^2 + 2 a b - 2 a c - 2 a d \\ &\quad + b^2 - 2 b c - 2 b d \\ &\quad + c^2 + 2 c d \\ &\quad + d^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (a + b)^3 &= a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3. \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3. \end{aligned}$$

**§ 22. Aggregat von Produkten.** Ein solches ist im allgemeinen einer Umformung nicht fähig. In einigen besonderen Fällen läßt sich jedoch das Aggregat von Produkten in ein Produkt von Aggregaten verwandeln. (Zerlegung eines Aggregats in Faktoren.) Die einfachsten dieser Fälle sind:

$$\begin{aligned} 1) \quad a x + b x - c x &= (a + b - c) x. \text{ nach Satz 13.} \\ a m - m &= (a - 1) m. \end{aligned}$$



$$2) \quad a c - b c - a d + b d = (a - b) c - (a - b) d \\ = (a - b) (c - d).$$

$$x z - y z - x + y = (x - y) z - (x - y) \\ = (x - y) (z - 1).$$

$$3) \quad a^2 + 2 a b + b^2 = (a + b)^2 \text{ nach Satz 15.} \\ a^2 - 2 a b + b^2 = (a - b)^2.$$

$$4) \quad a^2 - b^2 = (a + b) (a - b) \text{ nach Satz 16.}$$

## V. Division.

§ 23. Durch Umkehrung der Multiplikation entsteht die Division.

**Begriff.** *Dividieren heißt zu einem gegebenen (17) Produkt und gegebenem einen Faktor den andern Faktor suchen. — Das gegebene Produkt heißt Dividend, der gegebene Faktor heißt Divisor, der gesuchte Faktor heißt Quotient.*

Zeichen der Division : („dividiert durch“ oder „durch“). Der Dividend steht vor, der Divisor nach dem Divisionszeichen.

Die vier Rechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division heißen die vier Grundrechnungsarten oder die vier Spezies. Man unterscheidet:

Rechnungsarten der ersten Stufe: Addition und Subtraktion.  
Rechnungsarten der zweiten Stufe: Multiplikation und Division.  
Direkte Rechnungsarten: Addition und Multiplikation.  
Umgekehrte Rechnungsarten: Subtraktion und Division.

§ 24. Die Division hat einen zweifachen Sinn:

1) Zu einem gegebenen Produkt und gegebenem Multiplikator den Multiplikanden suchen; man heißt dies teilen.

Eine Summe von  $a$   $M$  soll unter  $b$  Personen verteilt werden; der Anteil einer jeden Person ist  $(a : b) M$ .

2) Zu einem gegebenen Produkt und gegebenem Multiplikanden den Multiplikator suchen; man heißt dies messen. Der Quotient wird in diesem Fall auch das Verhältniß der beiden Zahlen genannt.

$a : b$  (gelesen „a zu b“).

Wie oft läßt sich eine Strecke von  $b$   $m$  auf eine Strecke von  $a$   $m$  auftragen?  $(a : b)$  mal. — Wie oft ist  $b$  in  $a$  enthalten? — Wie verhält sich  $a$  zu  $b$ ?

§ 25. Aus dem Begriffe der Division folgt unmittelbar:  
 $(a : b) \cdot b = a.$



D. h. Der Quotient mit dem Divisor multipliziert giebt den Dividenden.

Demnach  $a b : b = a$ .  $a^5 : a^3 = a^2$ . u. s. w.

**§ 26.** Voraussetzung für die Möglichkeit der Division ist, daß der Divisor im Dividenden als Faktor enthalten ist. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall.

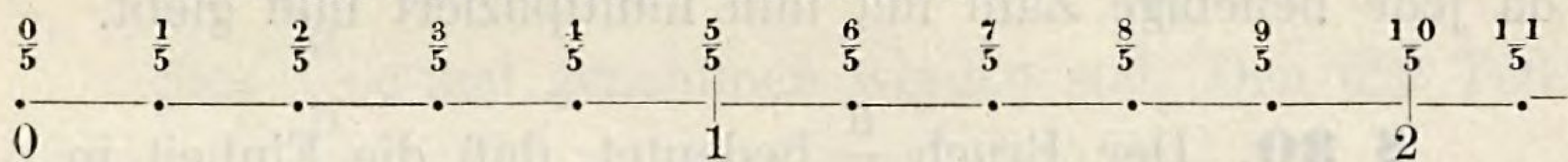
Wir erweitern daher wiederum die Zahlenreihe und stellen auf folgenden

**Begriff.** Einer und mehrere von gleichen Teilen **(18)** einer Einheit heißt ein Bruch. — Die Zahl, welche angiebt, in wieviele gleiche Teile die Einheit geteilt werden soll, heißt Nenner; die Zahl, welche angiebt, wie viele Teile genommen werden sollen, heißt Zähler.

Die Bezeichnung des Bruches geschieht durch einen wagrechten Strich. Der Zähler steht über, der Nenner unter dem Strich.

$\frac{a}{b}$  [gelesen „a gebrochen durch b“].

Bild der erweiterten Zahlenreihe:



**§ 27.** Teilt man eine Einheit in  $b$  gleiche Teile und nimmt  $a$  solcher Teile, so hat man den Bruch  $\frac{a}{b}$ . — Teilt man dagegen  $a$  Einheiten in  $b$  gleiche Teile, so hat man den Quotienten  $(a : b)$ . — Beides muß dasselbe sein. Daher:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

**Satz.** Ein Bruch ist gleich einem Quotienten, **(19)** dessen Dividend der Zähler, dessen Divisor der Nenner ist.

Dem Bruch kann man demnach auch den Sinn eines Verhältnisses beilegen. Der Bruch  $\frac{a}{b}$  als Verhältnis aufgefaßt bedeutet, daß der bte Teil des Nenners im Zähler  $a$  mal enthalten ist.

**§ 28.** Es ist zu unterscheiden:

1) Ein Bruch, dessen Zähler gleich ist dem Nenner, ist gleich eins.



2) Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, ist kleiner als eins. (echter Bruch)

3) Ein Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner, ist größer als eins. (unechter Bruch)

### § 29. Besondere Fälle.

1)  $a : 1 = a$ . denn  $a \cdot 1 = a$ .

Somit gilt auch  $\frac{a}{1} = a$ .

2)  $0 : a = 0$ .  $\frac{0}{a} = 0$ .

3)  $a : 0$  oder  $\frac{a}{0}$  kann keine endliche Zahl bedeuten, da jede endliche Zahl mit null multipliziert null und nicht  $a$  giebt. Man sagt daher, dieser Quotient sei unendlich groß und schreibt:

$$a : 0 = \infty. \quad \frac{a}{0} = \infty$$

4)  $0 : 0$  oder  $\frac{0}{0}$  kann jede beliebige Zahl bedeuten, da jede beliebige Zahl mit null multipliziert null giebt.

§ 30. Der Bruch  $\frac{a}{b}$  bedeutet, daß die Einheit in  $b$  gleiche Teile geteilt werden soll, und  $a$  solcher Teile genommen werden sollen.

Teilen wir jeden dieser Teile der Einheit nochmals in  $m$  gleiche Teile, so hat man den Bruch  $\frac{am}{bm}$ . Es ist daher

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \text{oder} \quad \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

**Satz.** Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, (20) wenn man im Zähler und im Nenner denselben Faktor beifügt oder hebt.

Es gilt dies ebenso, wenn der Bruch als Verhältnis aufgefaßt wird. Man nimmt  $m$  mal kleinere Teile des Nenners, zählt aber auf den Zähler  $m$  mal soviel solcher Teile.

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 b^2}{a b^4} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^5}{a^7} = \frac{a^5 \cdot 1}{a^5 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2}.$$



### § 31. Multiplikation von Brüchen.

- 1) Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl.

$\frac{a}{b} \cdot c$  bedeutet, daß die Einheit in  $b$  gleiche Teile zu teilen ist, und  $a$  solcher Teile zu nehmen sind, sowie daß noch  $c$  mal soviel solcher Teile genommen werden sollen. Dies ergibt:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

- 2) Multiplikation einer Zahl mit einem Bruch.

$a \cdot \frac{c}{b}$  kann nur den Sinn haben, daß der  $b^{\text{te}}$  Teil von  $a \cdot c$  mal genommen werden soll. Daher

$$a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Dies ist auch in Übereinstimmung mit Satz 10.

- 3) Multiplikation zweier Brüche.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$  bedeutet demnach, daß der  $d^{\text{te}}$  Teil des Bruches  $\frac{a}{b} \cdot c$  mal genommen werden soll. Den  $d^{\text{ten}}$  Teil

des Bruches  $\frac{a}{b}$  erhalten wir, wenn wir jeden der  $b$

Teile der Einheit nochmals in  $d$  gleiche Teile teilen und  $a$  solcher Teile nehmen. Daher:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} \cdot c = \frac{ac}{bd}$$

**Satz.** Das Produkt zweier Brüche ist ein Bruch, **(21)**  
dessen Zähler das Produkt der Zähler, dessen  
Nenner das Produkt der Nenner ist.

Da man jede ganze Zahl als Bruch ansehen kann mit dem Nenner eins (§ 29), sind in diesem Gesetz die Fälle 1 und 2 eingeschlossen.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}. \quad a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Bei dem Produkt zweier Brüche ist es erlaubt, denselben Faktor in dem Zähler des einen und im Nenner des andern Bruches zu heben.



$$\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{28} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{35} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \quad \frac{2a^5}{5b^4} \cdot \frac{15b^3}{8a^2} = \frac{3a^3}{4b}$$

### § 32. Division von Brüchen.

#### 1) Division eines Bruches durch eine Zahl.

a)  $\frac{a}{b} : c$  bedeutet als Teilung, daß wir den  $c^{\text{ten}}$

Teil des Bruches  $\frac{a}{b}$  nehmen sollen. Dies erhalten

wir, wenn wir jeden der  $b$  gleichen Teile der Einheit nochmals in  $c$  gleiche Teile teilen und  $a$  solcher Teile nehmen. Daher:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

b) Fassen wir die Division als Messung auf, so verwandeln wir die Zahl  $c$  in einen Bruch mit dem Nenner  $b$ , und es ist alsdann der gesuchte Quotient gleich dem Verhältnis der Zähler.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{bc}{b} = a : bc = \frac{a}{bc}$$

#### 2) Division einer Zahl durch einen Bruch.

a)  $a : \frac{c}{d}$  bedeutet als Teilung, daß eine Zahl ge-

sucht werden soll, deren  $\left(\frac{c}{d}\right)$  faches  $a$  ist. Diese Zahl muß offenbar der  $c^{\text{te}}$  Teil von  $a d$  fach genommen sein, d. h. das  $\left(\frac{d}{c}\right)$  fache von  $a$ . Also

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$$

b) Als Messung behandeln wir den Quotienten wie oben:

$$a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{d} : \frac{c}{d} = ad : c = \frac{ad}{c}$$

#### 3) Division zweier Brüche.

a. Als Teilung. Man erhält auf dieselbe Weise wie in 2a)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$



b) Als Messung. Man verwandelt beide Brüche in Brüche mit dem Nenner ( $bd$ ). Daher

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc = \frac{ad}{bc}.$$

Alle Fälle fassen wir zusammen in:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

**Satz.** Die Division durch einen Bruch bedeutet **(22)** dasselbe wie die Multiplikation mit dem umgekehrten Divisor.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}. \quad a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}.$$

Bei dem Quotient zweier Brüche ist es erlaubt, denselben Faktor in beiden Zählern und ebenso in beiden Nennern zu heben.

$$\frac{12}{25} : \frac{18}{35} = \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{14}{15}. \quad \frac{a^7}{b^5} : \frac{a^3}{b^8} = \frac{a^4}{1} : \frac{1}{b^3} = a^4 b^3.$$

Auch die sogenannten Bruchsbrüche sind hiemit erledigt.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}. \quad \frac{\frac{a}{c}}{\frac{d}{d}} = \frac{ad}{c}. \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

**§ 33. Division algebraischer Zahlen.** Aus dem entsprechenden Multiplikationsgesetz (Satz 12) folgt von selbst:

$$\left. \begin{aligned} (+a) : (+b) &= + \frac{a}{b} = + \frac{a}{b} \\ (-a) : (+b) &= - \frac{a}{b} = - \frac{a}{b} \\ (+a) : (-b) &= + \frac{a}{b} = - \frac{a}{b} \\ (-a) : (-b) &= - \frac{a}{b} = + \frac{a}{b} \end{aligned} \right\}$$

**Satz.** Die Vorzeichen von Dividend und Divisor übertragen sich auf den Quotienten. **(23)**

- a) Faßt man die Division als Teilung auf, so ist bezüglich des Dividenten sofort klar, daß dessen Vorzeichen sich auf den Quotienten überträgt. Bezüglich des Vorzeichens des Divisors leuchtet ein, daß der  $(+b)^{\text{te}}$  oder  $(-b)^{\text{te}}$  Teil von  $a$  nichts anderes bedeuten kann als, daß der  $b^{\text{te}}$  Teil von  $a$  das Vorzeichen des Divisors erhalten soll.



- b) Wird die Division als *Messung* angesehen, so ist klar, daß bei gleichen Vorzeichen des Dividenden und Divisors der Quotient positiv sein muß. Bei entgegengesetzten Vorzeichen muß der Quotient negativ sein, da durch Multiplikation des Divisors mit dem Quotienten sich das Vorzeichen des erstern umkehren soll.

### § 34. Division eines Aggregates durch eine Zahl.

Aus Satz 13 folgt:

$$(a - b) : c = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

**Satz.** Der Quotient aus einem Aggregat dividiert durch eine Zahl ist gleich dem Aggregate der Quotienten aus jedem Glied des Aggregats dividiert durch die Zahl. (24)

$$\begin{aligned} (12a^5 - 15a^4 - 6a^3 + 3a^2 - 2a + 18) : (-6a^3) \\ = -2a^2 + \frac{5}{2}a + 1 - \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a^2} - \frac{3}{a^3}. \end{aligned}$$

**§ 35. Division eines Aggregats durch ein Aggregat.** Ein solcher Quotient ist im allgemeinen einer Umformung nicht fähig. Im besondern sind folgende Fälle hervorzuheben.

1) Die Fälle, in welchen sich Dividend oder Divisor oder beide in Faktoren zerlegen lassen (§ 22). Es besteht dann mitunter die Möglichkeit im Zähler und Nenner denselben Faktor zu heben.

$$\frac{ax - bx}{cx - dx} = \frac{(a - b)x}{(c - d)x} = \frac{a - b}{c - d}. \quad \frac{ax - bx}{ay - by} = \frac{(a - b)x}{(a - b)y} = \frac{x}{y}.$$

$$\frac{ax - ay - bx + by}{cx - cy - dx + dy} = \frac{(a - b)(x - y)}{(c - d)(x - y)} = \frac{a - b}{c - d}.$$

$$\begin{aligned} \frac{ab - 2a - b + 2}{2c - 2 - bc + b} &= \frac{(a - 1)(b - 2)}{(c - 1)(2 - b)} = -\frac{(a - 1)(b - 2)}{(c - 1)(b - 2)} \\ &= -\frac{a - 1}{c - 1} = \frac{1 - a}{c - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a - b}{a + b}.$$

2) Ist keiner dieser Fälle anwendbar, so führt mitunter folgendes Verfahren zur Auffindung eines einfachen Quotienten.



Wenn die Glieder im Dividenden und im Divisor eine gleichmäßige Ordnung haben, muß das erste Glied des Dividenden entstanden sein durch Multiplikation des ersten Gliedes des Divisors mit dem ersten Gliede des Quotienten. Wir erhalten also (gleichsam versuchsweise) das erste Glied des Quotienten, wenn wir das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors dividieren.

Multipliziert man dann mit diesem ersten Glied des Quotienten den ganzen Divisor, so müssen die so erhaltenen Glieder im Dividenden enthalten sein. Wir subtrahieren daher diese Glieder vom Dividenden, und müssen dann aus dem Reste auf dieselbe Weise fortfahrend das zweite Glied des Quotienten erhalten.

Das Verfahren wird fortgesetzt, bis sich der Rest null ergibt, wobei man den vollständigen Quotienten hat.

Erlangt man den Rest null nicht, so ist es unmöglich einen einfachen Quotienten anzugeben.

Das Verfahren geschieht gewöhnlich in folgender Form:

$$\begin{array}{r}
 (2 a^5 - 13 a^4 b + 28 a^3 b^2 - 22 a^2 b^3 + 2 a b^4 + 3 b^5) \\
 : (a^3 - 5 a^2 b + 7 a b^2 - 3 b^3) = 2 a^2 - 3 a b - b^2 \\
 + 2 a^5 - 10 a^4 b + 14 a^3 b^2 - 6 a^2 b^3 \\
 \hline
 - 3 a^4 b + 14 a^3 b^2 - 16 a^2 b^3 + 2 a b^4 + 3 b^5 \\
 - 3 a^4 b + 15 a^3 b^2 - 21 a^2 b^3 + 9 a b^4 \\
 + \phantom{- 3 a^4 b} - \phantom{15 a^3 b^2} + \phantom{21 a^2 b^3} - \phantom{9 a b^4} \\
 \hline
 - a^3 b^2 + 5 a^2 b^3 - 7 a b^4 + 3 b^5 \\
 - a^3 b^2 + 5 a^2 b^3 - 7 a b^4 + 3 b^5 \\
 + \phantom{- a^3 b^2} - \phantom{5 a^2 b^3} + \phantom{7 a b^4} - \phantom{3 b^5} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

### § 36. Aggregat von Quotienten.

1) Bei gleichem Divisor. Aus Satz 24 folgt:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

**Satz.** Ein Aggregat von Quotienten mit gleichem (25) Divisor ist gleich dem Aggregate der Dividenden dividiert durch den Divisor.

Der Nenner ist gleichsam nur Benennung. 7 Achtel + 5 Achtel = 12 Achtel.

$$\frac{a - b}{x} - \frac{c - d}{x} = \frac{(a - b) - (c - d)}{x} = \frac{a - b - c + d}{x}.$$



2) Bei verschiedenen Divisoren laßen sich die Quotienten auf den nämlichen Divisor bringen.

Als gemeinschaftlichen Divisor nimmt man ein Produkt, welches jeden einzelnen Divisor als Faktor enthält. Hierauf fügt man bei jedem einzelnen Quotienten im Dividenden und im Divisor diejenigen Faktoren bei, welche dem Divisor fehlen, um den gemeinschaftlichen Divisor zu ergeben.

Vor Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisors sind die einzelnen Divisoren so sehr als möglich in Faktoren zu zerlegen.

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} + \frac{9}{10} - \frac{4}{15} &= \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{9}{2 \cdot 5} - \frac{4}{3 \cdot 5} \\ &= \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{44}{30} \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} &= \frac{a y z}{x y z} - \frac{b x z}{x y z} - \frac{c x y}{x y z} = \frac{a y z - b x z - c x y}{x y z} \\ \frac{7 a}{12 p^2} - \frac{4 b}{15 p q^2} + \frac{9 c}{20 q^4} &= \frac{35 a q^4 - 16 b p q^2 + 27 c p^2}{60 p^2 q^4} \\ \frac{a}{m x - m y} - \frac{b}{n x - n y} &= \frac{a}{m(x - y)} - \frac{b}{n(x - y)} \\ &= \frac{a n - b m}{m n (x - y)} \\ \frac{a + b}{x + y} - \frac{a - b}{x - y} &= \frac{(a + b)(x - y) - (a - b)(x + y)}{(x + y)(x - y)} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

## VI. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten.

**§ 37. Begriff.** Die bedingungsweise Gleich- **(26)**  
setzung zweier Zahlenausdrücke heißt Gleich-  
ung. — Die Größe in der Gleichung, auf welche  
sich die Bedingung bezieht, heißt die Unbe-  
kannnte. — Die Aufsuchung des Wertes,  
welchen die Unbekannte haben muß, damit die  
Gleichung richtig ist, heißt die Gleichung  
auflösen.

Die notwendige Gleichheit zweier Zahlenausdrücke heißt Formel, auch analytische Gleichung (Gegensatz synthetische Gleichung). Alles in den Abschnitten II mit V Behandelte sind Formeln.



Die Unbekannte in einer Gleichung wird meist mit dem Buchstaben  $x$  bezeichnet.

Die Lesung des Gleichheitszeichens geschieht bei der Gleichung mit den Worten „soll gleich sein“, [bei der Formel „ist gleich“].

Beispiele von Gleichungen:

$$7 + x = 12.$$

$$\text{Auflösung: } x = 5.$$

$$x - 9 = 7.$$

$$,, \quad x = 16.$$

$$5x = 35.$$

$$,, \quad x = 7.$$

$$\frac{24}{x} = 3.$$

$$,, \quad x = 8.$$

Eine Gleichung heißt linear oder vom ersten Grad, wenn in derselben in ihrer einfachsten Form die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt.

**§ 38.** Die Auflösung der Gleichungen beruht auf dem folgenden selbstverständlichen

**Satz.** Die Bedingung für die Richtigkeit einer (27) Gleichung ändert sich nicht, wenn man mit beiden Gleichungsseiten die nämliche Operation vornimmt:

- d. h. wenn man 1) zu beiden Gleichungsseiten dieselbe Zahl addiert, oder
- 2) von beiden Gleichungsseiten dieselbe Zahl subtrahiert, oder
- 3) beide Gleichungsseiten mit derselben Zahl multipliziert, oder
- 4) beide Gleichungsseiten durch dieselbe Zahl dividiert.

### § 39. Einfache Gleichungen.

1)  $x + a = b.$

Man subtrahiere von beiden Gleichungsseiten  $a$ .

$$x = b - a.$$

2)  $x - a = b.$

Man addiere zu beiden Gleichungsseiten  $a$ .

$$x = b + a,$$

3)  $a - x = b.$

Man addiere zu beiden Gleichungsseiten  $x$  und verfähre nach 1.

$$a = b + x$$

$$x = a - b.$$



$$4) \quad ax = b.$$

Man dividiere beide Gleichungsseiten durch  $a$ .

$$x = \frac{b}{a}.$$

$$5) \quad \frac{x}{a} = b.$$

Man multipliziere beide Gleichungsseiten mit  $a$ .

$$x = ab.$$

$$6) \quad \frac{a}{x} = b.$$

Man multipliziere beide Gleichungsseiten mit  $x$  und verfähre nach 4.

$$a = bx$$

$$x = \frac{a}{b}.$$

**§ 40.** Auf diese einfachen Gleichungen lassen sich die andern lineären Gleichungen zurückführen.

1) Sind die Seiten einer Gleichung Aggregate, so sucht man die Gleichung zu ordnen, d. h. die Glieder mit der Unbekannten auf die eine Seite, die Glieder ohne die Unbekannte auf die andere Seite zu bringen.

$$ax - b = c + dx.$$

Man addiere zu beiden Gleichungsseiten  $b$  und subtrahiere von beiden Gleichungsseiten  $dx$ .

$$ax - dx = b + c$$

$$(a - d)x = b + c$$

$$x = \frac{b + c}{a - d}.$$

Hiebei merkt man sich gewöhnlich folgende Regel: Ein Glied der Gleichung, welches über das Gleichheitszeichen gehoben wird, kehrt sein Vorzeichen um.

2) Steht die Unbekannte in Klammern, so sind diese zuerst aufzulösen.

$$(a - x)b + c = d - (e - x)f$$

$$ab - bx + c = d - ef + fx.$$

$$x = \frac{d - ef - ab - c}{-b - f} = \frac{ab + c - d + ef}{b + f}.$$

3) Kommen in der Gleichung Brüche vor, so multipliziert man beide Gleichungsseiten mit dem gemeinschaftlichen Nenner.



$$\frac{a+x}{m} - b = c - \frac{d-x}{n}$$

$$(a+x)n - bmn = cmn - (d-x)m$$

$$x = \frac{cmn - dm - an + bmn}{n - m}.$$

### § 41. Vereinfachungen.

1) Kommt auf beiden Gleichungsseiten das nämliche Glied vor, so kann dasselbe weggelassen werden.

$$(x-a)(x-b) = (x-c)(x-d)$$

$$x^2 - ax - bx + ab = x^2 - cx - dx + cd$$

$$x = \frac{ab - cd}{a + b - c - d}$$

2) Haben beide Gleichungsseiten denselben (bekannten) Faktor, so läßt sich derselbe heben.

$$amx + bm = cmx - dm$$

$$m(ax + b) = m(cx - d)$$

$$x = \frac{-b - d}{a - c}.$$

### § 42. Besondere Fälle.

1) Beide Gleichungsseiten haben als Faktor die Unbekannte, oder einen Ausdruck, der die Unbekannte enthält. In diesem Fall läßt sich die Gleichung so umwandeln, daß die rechte Seite null, die linke aber ein Produkt ist. Da ein Produkt null wird, wenn einer der Faktoren null ist, so ergeben sich zwei (nach Umständen drei und mehr) Lösungen. Die Werte der Unbekannten werden bezeichnet mit  $x_1$   $x_2$  . . . .

$$\begin{array}{l|l} ax^2 + bx = cx^2 + dx & (x+a)^2 + b(x+a) = c(x+a) \\ ax^2 + bx - cx^2 - dx = 0 & (x+a) \cdot [(x+a) + b - c] = 0 \\ x[ax + b - cx - d] = 0 & x + a = 0 \quad | \quad (x+a) + b - c = 0 \\ x_1 = 0 \quad | \quad ax + b - cx - d = 0 & x_1 = -a \quad | \quad x_2 = c - a - b. \\ & x_2 = \frac{d - b}{a - c}. \end{array}$$

2) Wenn der Faktor der Unbekannten null ist, ergibt sich:

$$0x = a$$

$$x = \frac{a}{0} = \infty \quad (\S 29, 3).$$



3) Wenn sowohl der Faktor der Unbekannten als auch das von der Unbekannten freie Glied null ist, ergibt sich:

$$0x = 0$$

$$x = \frac{0}{0} \text{ (unbestimmt, § 29, 4).}$$

Die Gleichung wird in diesem Fall durch jeden Wert der Unbekannten erfüllt, d. h. sie ist keine synthetische sondern eine analytische Gleichung (Formel).

**§ 43. Hilfsunbekannte.** Mitunter ist es vorteilhaft, statt die Unbekannte unmittelbar aufzusuchen, erst einen Ausdruck zu suchen, der die Unbekannte enthält; dieser heißt Hilfsunbekannte. Voraussetzung ist hierbei, daß mit Einführung der Hilfsunbekannten die eigentliche Unbekannte aus der Gleichung verschwinde.

$$(a + bx)c + d = (a + bx)e + f.$$

$$\text{Hilfsunbekannte } a + bx = u.$$

$$u \cdot c + d = u \cdot e + f.$$

$$u = \frac{f - d}{c - e}$$

$$x = \frac{u - a}{b} = \frac{\frac{f - d}{c - e} - a}{b} \text{ u. s. w.}$$

**§ 44. Textgleichungen** sind in Worten angegebene Gleichungsaufgaben. Man erteilt auf die gestellte Frage eine sogenannte vorläufige Antwort: die gesuchte Größe sei  $x$ . Indem man dann die Wortsprache in die Sprache der Algebra gleichsam übersetzt, erhält man eine Gleichung, und nach deren Auflösung eine endgültige Antwort.

Beispiel 1. Eine Zahl gibt zu  $a$  addiert dasselbe, als wenn man das  $n$  fache der Zahl von  $b$  subtrahiert.

Vorläufige Antwort: Die Zahl sei  $x$ .

$$a + x = b - nx$$

$$x = \frac{b - a}{1 + n}.$$

Endgültige Antwort: die Zahl ist  $\frac{b - a}{1 + n}$ .

Beispiel 2. Zwei Eisenbahnzüge fahren einander entgegen auf einer 305 *km* langen Strecke, der eine mit einer Geschwindigkeit von 40 *km*, der andere von 35 *km*



in der Stunde; der zweite geht 2 Stunden später ab als der erste. Wann und wo begegnen sie sich?

Vorläufige Antwort: Sie begegnen sich  $x$  Stunden nach Abgang des ersten Bahnzuges.

Weg des ersten Zuges:  $40 x \text{ km}$ ,

Weg des zweiten Zuges:  $35 (x - 2) \text{ km}$ .

$$40 x + 35 (x - 2) = 305.$$

$$x = 5.$$

Endgültige Antwort: Sie begegnen sich 5 Stunden nach Abgang des ersten Bahnzuges.

Weg des ersten Zuges:  $5 \cdot 40 = 200 \text{ km}$ ,

Weg des zweiten Zuges:  $3 \cdot 35 = 105 \text{ km}$ .

## VII. Proportionen.

§ 45. Eine besondere Art von Gleichungen sind die Proportionen.

**Begriff.** Die Gleichheit zweier Verhältnisse (28) heißt Proportion.

Siehe § 24, 2.

Die vier in einer Proportion vorkommenden Zahlen heißen die Glieder und zwar:

Das erste und vierte Glied äußere — das zweite und dritte Glied innere Glieder;

das erste und zweite Glied Vorderglieder — das dritte und vierte Glied Hinterglieder;

das erste und dritte, und ebenso das zweite und vierte Glied homologe Glieder.

Die Glieder einer Proportion sind stets als reine Zahlen zu denken, wie dies auch dem Sinne des Verhältnisses entspricht. Es ist nämlich

$$7 M : 5 M = 7 : 5.$$

Wenn die Proportion besteht

$$a : b = m : n,$$

so ist dieselbe gleichbedeutend mit folgenden zwei Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} a = m u \\ b = n u \end{array} \right\}$$

d. h. irgend eine GröÙe  $u$  ist in  $a$   $m$  mal, in  $b$   $n$  mal enthalten.

Die Proportionen  $a : b = x : y$  |  
und  $b : c = y : z$  |

zieht man zusammen in die (fortlaufende) Proportion

$$a : b : c = x : y : z.$$



Dieselbe ist gleichbedeutend mit den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a &= xu \\ b &= yu \\ c &= zu \end{aligned} \right\}.$$

§ 46. Wenn die Proportion besteht:

$$a : b = c : d$$

so ergibt sich, wenn man beide Gleichungsseiten mit  $bd$  multipliziert:

$$ad = bc$$

**Satz.** In einer Proportion ist das Produkt der (29) äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder.

Hieraus folgt der einfachste Weg, zu drei Gliedern einer Proportion das unbekannte vierte zu finden:

$$\begin{array}{ll} a : b = c : x & a : x = c : d \\ ax = bc & cx = ad \\ x = \frac{bc}{a} & x = \frac{ad}{c} \end{array}$$

§ 47. Aus Satz 29 folgt

1) Eine Proportion wird nicht gestört, wenn man die äußern Glieder unter sich oder die inneren Glieder unter sich, oder die äußern Glieder mit den inneren vertauscht.

|             |                 |                        |
|-------------|-----------------|------------------------|
| Wenn        | $a : b = c : d$ | ferner $b : a = d : c$ |
| So ist auch | $a : c = b : d$ | $c : a = d : b$        |
|             | $d : b = c : a$ | $b : d = a : c$        |
|             | $d : c = b : a$ | $c : d = a : b$        |

2) Eine Proportion wird nicht gestört, wenn man bei einem äußern und einem inneren Glied einen beliebigen Faktor beifügt oder hebt.

|             |                   |             |                   |
|-------------|-------------------|-------------|-------------------|
| Wenn        | $a : b = c : d$   | Wenn        | $ax : b = cx : d$ |
| so ist auch | $am : bm = c : d$ | so ist auch | $a : b = c : d$   |
| oder        | $a : bn = c : dn$ |             |                   |
|             | u. s. w.          |             |                   |

§ 48. 1) Wenn  $a : b = c : d$   
so ist  $ad = bc$



$$\text{also auch } \begin{array}{l|l} ad \pm bd = bc \pm bd & ad \pm cd = bc \pm cd \\ (a \pm b)d = (c \pm d) \cdot b & (a \pm c)d = (b \pm d)c \\ (a \pm b):(c \pm d) = b:d & (a \pm c):((b \pm d)) = c:d \\ & = a:c \qquad \qquad \qquad = a:b. \end{array}$$

**Satz.** In einer Proportion verhält sich die **(30)** Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Paar homologe Glieder; — ferner verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und dritten Gliedes zur Summe oder Differenz des zweiten und vierten Gliedes wie die Vorderglieder oder wie die Hinterglieder.

Anderer Beweis. Wenn  $a : b = c : d$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} a = cu \\ b = du \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } a \pm b = (c \pm d)u$$

$$\text{also } (a \pm b):(c \pm d) = a:c.$$

2) Aus 1) folgt auch

$$\begin{array}{l} (a + b):(c + d) = (a - b):(c - d) \quad \text{u. s. w.} \\ \text{und } (a + c):(b + d) = (a - c):(b - d) \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

3) Wenn  $a : b : c = x : y : z$

$$\text{So ist } (a + b - c):(x + y - z) = a:x = b:y = c:z. \quad \text{u. s. w.}$$

$$\text{ferner } (a + b - c):(a - b + c):(a + b):(a - c) \quad \text{u. s. w.}$$

$$= (x + y - z):(x - y + z):(x + y):(x - z) \quad \text{u. s. w.}$$

## VIII. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

**§ 49.** 1) Eine lineäre Gleichung mit zwei Unbekannten giebt unendlich viele Wertepaare der Unbekannten, welche die Gleichung erfüllen. Die Gleichung heißt daher unbestimmt.

$$\text{Beispiel. } 7x + 5y = 31.$$

|                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| Für $x = 0$ ist $y = \frac{31}{5}$ | Für $y = 0$ ist $x = \frac{31}{7}$ |
| „ $x = 1$ „ $y = \frac{24}{5}$     | „ $y = 1$ „ $x = \frac{26}{7}$     |
| „ $x = 2$ „ $y = \frac{17}{5}$     | „ $y = 2$ „ $x = \frac{21}{7} = 3$ |
| „ $x = 3$ „ $y = \frac{10}{5} = 2$ | u. s. w.                           |



2) Ist das von den Unbekannten freie Glied null, so heißt die Gleichung homogen. Wenn

$$ax + by = 0$$

so ist  $a \cdot \frac{x}{y} + b = 0$

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a}$$

$$x : y = b : (-a).$$

d. h. Durch eine homogene lineäre Gleichung mit zwei Unbekannten ist das Verhältnis der Unbekannten bestimmt.

Eine lineäre Gleichung mit drei und mehr Unbekannten ist natürlich ebenfalls unbestimmt.

**§ 50. Ein System von zwei lineären Gleichungen mit zwei Unbekannten** haben wir, wenn die Forderung gestellt ist, daß ein Wertepaar der Unbekannten zwei Gleichungen zugleich erfüllen soll. Die allgemeine Form eines solchen ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } a_1 x + b_1 y = s_1 \\ \text{II } a_2 x + b_2 y = s_2 \end{array} \right\}$$

Zur Auflösung eines solchen Systems sucht man aus den zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten herzustellen eine Gleichung mit einer Unbekannten. Dieses Beseitigen einer Unbekannten heißt eliminieren. Die wichtigsten Eliminationsmethoden sind die folgenden.

**§ 51. Substitutionsmethode.** Man sieht in einer der Gleichungen die eine Unbekannte als bekannt an, löst die Gleichung für die andere Unbekannte auf und setzt den so gefundenen Ausdruck in die andere Gleichung statt der betreffenden Unbekannten ein (substituieren).

Im allgemeinen ist diese Methode unbequem und nur vorteilhaft, wenn eine der Gleichungen sehr einfach ist.

Beispiel.  $\left. \begin{array}{l} \text{I } 8x + 5y = 60 \\ \text{II } 7x + y = 39 \end{array} \right\}$

Aus II  $y = 39 - 7x.$

II substituiert in I . . . . III  $8x + 5(39 - 7x) = 60$   
 $x = 5.$

III substituiert in II . . . . IV  $y = 39 - 7 \cdot 5 = 4.$

Wertepaar  $x = 5 \quad y = 4.$



**§ 52. Komparationsmethode.** Man löst die zwei Gleichungen für dieselbe Unbekannte auf und setzt die gefundenen Ausdrücke einander gleich.

Im allgemeinen weitläufig.

Beispiel. 
$$\begin{array}{l} \text{I } 9x - 2y = 23 \\ \text{II } 7x - 3y = 15 \end{array}$$

Aus I  $x = \frac{23 + 2y}{9}$       Aus II  $x = \frac{15 + 3y}{7}$

I und II kompariert . . . . III  $\frac{23 + 2y}{9} = \frac{15 + 3y}{7}$   
 $y = 2$

III substituiert in I . . . . IV  $x = \frac{23 + 2 \cdot 2}{9} = 3$

oder III substituiert in II . . . . V  $x = \frac{15 + 3 \cdot 2}{7} = 3$

Wertepaar  $x = 3 \quad y = 2$ .

**§ 53. Additionsmethode.** Hat die zu eliminierende Unbekannte in beiden Gleichungen denselben Faktor mit entgegengesetztem Vorzeichen, so fällt durch Addition der beiden Gleichungen diese Unbekannte hinaus.

Ist das Vorzeichen dasselbe, so multipliziert man eine der beiden Gleichungen mit der negativen Einheit.

Sind die Faktoren der zu eliminierenden Unbekannten nicht gleich, so kann man sie gleich machen. Man stellt zu diesem Zweck ein Produkt her, welches jeden dieser Faktoren enthält, und multipliziert jede der beiden Gleichungen mit denjenigen Faktoren, die in derselben der zu eliminierenden Unbekannten fehlen.

Beisp. 1. 
$$\begin{array}{l} \text{I } 4x + 5y = 13 \\ \text{II } 7x - 5y = 9 \end{array}$$
 I + II . . . . III  $11x = 22$   
 $x = 2$

III subst. in I od. II  $y = 1$ .

Beispiel 3. 
$$\begin{array}{l} \text{I } 8x + 5y = 111 \\ \text{II } 12x - 7y = 7 \end{array}$$

Elimination von y. 5 und 7 sind als Faktoren enthalten in  $(5 \cdot 7)$

I  $\cdot 7$  + II  $\cdot 5$  . . . .

III  $56x + 5 \cdot 7y + 60x - 5 \cdot 7y = 777 + 35$   
 $x = 7$



Elimination von  $x$ . 8 und 12 sind als Faktoren enthalten in  $(8 \cdot 3)$

$$I \cdot 3 + II \cdot (-2)$$

$$\dots IV \quad 8 \cdot 3 x + 15 y - 12 \cdot 2 x + 14 y = 333 - 14 y = 11$$

$$\text{Wertepaar } x = 7 \quad y = 11.$$

Beispiel 4. Allgemeine Form:

$$\left. \begin{array}{l} I \quad a_1 x + b_1 y = s_1 \\ II \quad a_2 x + b_2 y = s_2 \end{array} \right\}$$

$$I \cdot b_2 + II \cdot (-b_1)$$

$$\dots III \quad a_1 b_2 x + b_1 b_2 y - a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = s_1 b_2 - s_2 b_1$$

$$x = \frac{s_1 b_2 - s_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$II \cdot a_1 + I \cdot (-a_2)$$

$$\dots IV \quad a_1 a_2 x + a_1 b_2 y - a_1 a_2 x - a_2 b_1 y = a_1 s_2 - a_2 s_1$$

$$y = \frac{a_1 s_2 - a_2 s_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

**§ 54. Determinanten zweiten Grads.** Am übersichtlichsten wird die Lösung eines Systems von zwei lineären Gleichungen mit zwei Unbekannten durch Anwendung der Determinanten. Unter dem Zeichen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad [\text{gelesen „Determinante } a \ b \ c \ d\text{“}]$$

versteht man das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale ( $a \ d$ ) vermindert um das Produkt der Elemente der Nebendiagonale ( $b \ c$ ). D. h.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a d - b c.$$

Ein solcher Ausdruck heißt Determinante zweiten Grads.

Unter Anwendung dieser Bezeichnungsweise ist die Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} I \quad a_1 x + b_1 y = s_1 \\ II \quad a_2 x + b_2 y = s_2 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{s_1 b_2 - s_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{a_1 s_2 - a_2 s_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Beispiel.

$$\left. \begin{array}{l} I \quad 17 x - 15 y = 23 \\ II \quad 19 x + 16 y = 124 \end{array} \right\}$$



$$x = \frac{\begin{vmatrix} 23 - 15 \\ 124 & 16 \\ 17 - 15 \\ 19 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 - 15 \\ 19 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{23 \cdot 16 - 124 \cdot (-15)}{17 \cdot 16 - 19 \cdot (-15)} = \frac{368 + 1860}{272 + 285} \\ = \frac{2228}{557} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 23 \\ 19 & 124 \\ 17 - 15 \\ 19 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 - 15 \\ 19 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{17 \cdot 124 - 19 \cdot 23}{17 \cdot 16 - 19 \cdot (-15)} = \frac{2108 - 437}{272 + 285} \\ = \frac{1671}{557} = 3.$$

### § 55. Besondere Fälle.

1) Gegeben Summe und Differenz der Unbekannten.

$$\begin{cases} \text{I } x + y = s \\ \text{II } x - y = d \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} (s + d) \qquad y = \frac{1}{2} (s - d).$$

2) Gegeben Summe oder Differenz und Verhältniß der Unbekannten.

$$\begin{cases} \text{I } x + y = s \\ \text{II } x : y = m : n \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \text{I } x - y = d \\ \text{II } x : y = m : n \end{cases}$$

Am übersichtlichsten ist folgende Lösung:

$$\text{Aus II} \quad \begin{cases} x = mu \\ y = nu \end{cases}$$

$$\text{Substituiert in I} \dots \quad \begin{cases} \text{III } mu + nu = s \\ u = \frac{s}{m+n} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \text{III } mu - nu = d \\ u = \frac{d}{m-n} \end{cases}$$

$$\text{III substituiert in II} \dots \quad \begin{cases} \text{IV } x = \frac{s}{m+n} \cdot m \\ y = \frac{s}{m+n} \cdot n \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \text{IV } x = \frac{d}{m-n} \cdot m \\ y = \frac{d}{m-n} \cdot n. \end{cases}$$

3) Ist überhaupt das Verhältniß der Unbekannten gegeben, so ist die Auflösung des Verhältnisses in zwei Gleichungen fast immer vorteilhaft.

$$\text{Beispiel.} \quad \begin{cases} \text{I } ax + by = c \\ \text{II } x : y = m : n. \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} \text{d. h. } \left. \begin{array}{l} \text{II } x = mu \\ y = nu \end{array} \right\} \\ \text{substituiert in I } \dots \text{ III } am + bnu = c \end{array}$$

$$u = \frac{c}{am + bn}$$

$$\text{Substituiert in II } \dots \text{ IV } x = \frac{cm}{am + bn} \quad y = \frac{cn}{am + bn}.$$

**§ 56.** 1) System von zwei lineären Gleichungen mit drei Unbekannten; ein solches ist unbestimmt. Dasselbe gilt überhaupt von jedem System, in welchem die Zahl der Unbekannten die Zahl der Gleichungen übersteigt.

2) Ein System von zwei homogenen lineären Gleichungen mit drei Unbekannten bestimmt das Verhältniss der Unbekannten.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ \text{II } a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{array} \right\} \text{ oder } \left. \begin{array}{l} \text{I } a_1 \cdot \frac{x}{z} + b_1 \cdot \frac{y}{z} = -c_1 \\ \text{II } a_2 \cdot \frac{x}{z} + b_2 \cdot \frac{y}{z} = -c_2 \end{array} \right\}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

**§ 57.** System von drei lineären Gleichungen mit drei Unbekannten.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } a_1 x + b_1 y + c_1 z = s_1 \\ \text{II } a_2 x + b_2 y + c_2 z = s_2 \\ \text{III } a_3 x + b_3 y + c_3 z = s_3 \end{array} \right\}.$$

Die Lösung ist im allgemeinen folgende: Man eliminiere aus zwei Gleichungspaaren (z. B. aus I mit II und aus I mit III) eine der Unbekannten (z. B. z), so erhält man ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (x und y).

Im besondern ergeben sich oft sehr erhebliche Vereinfachungen, wie etwa die folgenden:

1) Eine der Gleichungen hat nur zwei Unbekannte; es genügt alsdann die dritte Unbekannte aus den beiden andern Gleichungen zu eliminieren.



Beispiel. 
$$\begin{array}{l} \text{I } 7x + 2y + 5z = 16 \\ \text{II } 8x - 3y - 6z = 13 \\ \text{III } 2x + 5y = 9 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } 7x + 2y + 5z = 16 \\ \text{II } 8x - 3y - 6z = 13 \\ \text{III } 2x + 5y = 9 \end{array}} \right\}$$

Aus I und II z eliminiert ... IV  $82x - 3y = 161$

Aus III und IV.  $x = 2 \quad y = 1$

Durch Substitution in I oder II  $z = 0$

2) Es gelingt mitunter zwei Unbekannte zugleich zu eliminieren.

Beispiel. 
$$\begin{array}{l} \text{I } 5x + 4y - 2z = 21 \\ \text{II } 7x - 6y + 3z = 12 \\ \text{III } 4x + 5y + 11z = 33 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } 5x + 4y - 2z = 21 \\ \text{II } 7x - 6y + 3z = 12 \\ \text{III } 4x + 5y + 11z = 33 \end{array}} \right\}$$

..... IV  $15x + 12y - 6z + 14x - 12y + 6z = 63 + 24$   
 $x = 3.$

Durch Substitution erhält man ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

3) Zwei Unbekannte drücken sich leicht durch die dritte aus.

Beispiel. 
$$\begin{array}{l} \text{I } x + 4z = 22 \\ \text{II } y + 5z = 28 \\ \text{III } 7x + 9y + 11z = 96 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } x + 4z = 22 \\ \text{II } y + 5z = 28 \\ \text{III } 7x + 9y + 11z = 96 \end{array}} \right\}$$

Aus I  $x = 22 - 4z$  Aus II  $y = 28 - 5z$

Substituiert in III ...

IV  $7 \cdot (22 - 4z) + 9(28 - 5z) + 11z = 96$   
 $z = 5$

$x = 2 \quad y = 3.$

4) Das Verhältniss der Unbekannten ist gegeben.

Beispiel 1. 
$$\begin{array}{l} \text{I u. II } x:y:z = 5:3:2 \\ \text{III } 4x + 5y + 7z = 98 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I u. II } x:y:z = 5:3:2 \\ \text{III } 4x + 5y + 7z = 98 \end{array}} \right\}$$

Wie in § 55, 3. I und II  $x = 5u, y = 3u, z = 2u$

Substituiert in III ... IV  $4 \cdot 5u + 5 \cdot 3u + 7 \cdot 2u = 98$   
 $u = 2$

$x = 5 \cdot 2 = 10 \quad y = 3 \cdot 2 = 6 \quad z = 2 \cdot 2 = 4.$

Beispiel 2. 
$$\begin{array}{l} \text{I } x:y = 3:2 \\ \text{II } y:z = 4:3 \\ \text{III } x+y+z = 156 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } x:y = 3:2 \\ \text{II } y:z = 4:3 \\ \text{III } x+y+z = 156 \end{array}} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{I } x:y = 6:4 \\ \text{II } y:z = 4:3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } x:y = 6:4 \\ \text{II } y:z = 4:3 \end{array}} \right\} \quad x:y:z = 6:4:3 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = 6u \\ y = 4u \\ z = 3u \end{array}} \right\}$$

Substituiert in III ... IV  $u = 12$   
 $x = 72 \quad y = 48 \quad z = 36.$



**§ 58.** Die allgemeine Lösung eines Systems von drei lineären Gleichungen mit drei Unbekannten (§ 57) geschieht am übersichtlichsten nach der Methode von Bézout.

Man multipliziert jede der Gleichungen mit einem vorerst noch unbestimmten Faktor  $u_1, u_2, u_3$ , und addiert dieselben. Hiedurch ergibt sich:

$$\text{IV } (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) x + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) y + (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) z = s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 u_3.$$

Zur Bestimmung der Unbekannten  $x$  treffen wir nun über die drei noch unbestimmten Faktoren folgende Verfügungen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{V } a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 1 \\ \text{VI } b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = 0 \\ \text{VII } c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Die Erfüllung dieser Bedingungen vorausgesetzt ist als dann

$$\text{VIII } x = s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 u_3.$$

Aus VI und VII folgt nach § 56, 2.

$$u_1 : u_2 : u_3 = \left| \begin{array}{cc} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| : - \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array} \right|.$$

Nach dem in § 57, 4 beschriebenen Verfahren erhält man alsdann die Werte von  $u_1, u_2, u_3$  und hiernach

$$\begin{aligned} x &= \frac{s_1 \cdot \left| \begin{array}{cc} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| + s_2 \cdot - \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| + s_3 \cdot \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array} \right|}{a_1 \cdot \left| \begin{array}{cc} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| + a_2 \cdot - \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| + a_3 \cdot \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array} \right|} \\ &= \frac{s_1 b_2 c_3 - s_1 b_3 c_2 - s_2 b_1 c_3 + s_2 b_3 c_1 + s_3 b_1 c_2 - s_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}. \end{aligned}$$

**§ 59. Determinanten dritten Grads.** Entwerfen wir das Schema:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Greifen wir uns ein Element z. B.  $a_2$  heraus; streichen die Spalte und Zeile, in welcher dasselbe steht, bilden aus den stehengebliebenen vier Elementen eine Determinante zweiten Grads

$$\left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right|$$

versehen dieselbe endlich mit positivem oder negativem Zeichen, je nachdem für das betreffende Element die Summe



seiner Zeilen- und Spaltenzahlen grade ist oder ungrade (z. B. für das Element  $a_2$  : zweite Zeile und erste Spalte,  $2 + 1 = 3$ , ungerade, also negatives Vorzeichen), so heißt die so gebildete Determinante die zu dem betreffenden Element gehörige *Unterdeterminante*.

$$\text{Unterdeterminante zu } a_2 : - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Unterdeterminante zu } c_3 : + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Unter dem Zeichen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verstehen wir nun das Aggregat aus den Elementen einer Spalte oder Zeile jedes multipliziert mit seiner Unterdeterminante. Dieses Aggregat ist das nämliche, welche Spalte oder Zeile man auch wählen mag. Dasselbe wird genannt eine *Determinante dritten Grads*.

Mit Anwendung dieser Bezeichnungsweise sind die Werte von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{Beispiel.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} \quad 5x + 6y - 7z = 29 \\ \text{II} \quad 9x - 8y + 10z = 41 \\ \text{III} \quad -11x + 12y + 13z = 7 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 6 & -7 \\ 41 & -8 & 10 \\ 7 & 12 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 & -7 \\ 9 & -8 & 10 \\ -11 & 12 & 13 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 29 & -7 \\ 9 & 41 & 10 \\ -11 & 7 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 & -7 \\ 9 & -8 & 10 \\ -11 & 12 & 13 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 & 29 \\ 9 & -8 & 41 \\ -11 & 12 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 & -7 \\ 9 & -8 & 10 \\ -11 & 12 & 13 \end{vmatrix}}.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{29 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} + 41 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 10 \end{vmatrix}}{5 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 10 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-6496 - 6642 + 28}{-1120 - 1458 - 44} = \frac{-13110}{-2622} = 5. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y &= \frac{29 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ -11 & 13 \end{vmatrix} + 41 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -11 & 13 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}}{6 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ -11 & 13 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -11 & 13 \end{vmatrix} + 12 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{-6583 - 492 - 791}{-1362 + 96 - 1356} = \frac{-7866}{-2622} = 3. \\
 z &= \frac{29 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ -11 & 12 \end{vmatrix} + 41 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -11 & 12 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}}{-7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ -11 & 12 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -11 & 12 \end{vmatrix} + 13 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{580 - 5166 - 658}{-140 - 1260 - 1222} = \frac{-5244}{-2622} = 2.
 \end{aligned}$$

Die Erweiterung dieser Lehren für Systeme von vier Gleichungen mit vier Unbekannten u. s. w. ergibt sich von selbst.

Näheres hierüber in des Verfassers Schrift: „Die Determinanten in genetischer Behandlung,“ München 1887 bei Theodor Ackermann.



## Zweite Abteilung.

### Dritte Stufe der Rechnungsarten.

---

#### IX. Überblick der Rechnungsarten der dritten Stufe.

§ 60. Tritt in einem Produkt immer dieselbe Zahl als Faktor auf, so haben wir eine neue Rechnungsart, die Potenziation. (vergl. § 17.)

**Begriff.** *Potenzieren heißt eine Zahl so oft (31) als Faktor setzen, als es eine andere Zahl angiebt. — Die Zahl, welche als Faktor gesetzt werden soll, heißt Dignand (auch Basis); die Zahl, welche angiebt, wie oft der Dignand als Faktor gesetzt werden soll, heißt Exponent; das Ergebnis der Potenziation heißt Potenz.*

Die Bezeichnung der Potenziation geschieht, indem man den Exponenten rechts über den Dignanden setzt:

$a^n$  [gelesen „a zur  $n^{\text{ten}}$  Potenz“, „a zur  $n^{\text{ten}}$ “, „a hoch  $n$ “].

Die zweite Potenz heißt Q u a d r a t, die dritte K u b u s.

Dignand und Exponent lassen sich nicht vertauschen. Folge davon ist, daß die Potenziation zwei Umkehrungen hat, sowie daß es eine vierte Stufe der Rechnungsarten nicht giebt.

§ 61. Die erste Umkehrung der Potenziation ist die Radikation.

**Begriff.** *Radizieren heißt zu einer gegebenen Potenz und gegebenem Exponenten den Dignanden suchen. — Die gegebene Potenz heißt der Radikand; der gegebene Exponent heißt*



*Radikator (auch Wurzelexponent); der gesuchte Dignand heißt die Wurzel.*

Bezeichnung der Wurzel:  $\sqrt[r]{a}$  [gelesen „r<sup>te</sup> Wurzel aus a“], a der Radikand, r der Radikator.

Beispiele.  $2^5 = 32$  folglich  $\sqrt[5]{32} = 2$   
 $10^4 = 10000$  „  $\sqrt[4]{10000} = 10$   
 $5^3 = 125$  „  $\sqrt[3]{125} = 5$   
 $7^2 = 49$  „  $\sqrt[2]{49} = 7$   
gewöhnlich  $\sqrt{49} = 7$ .

Die zweite Wurzel heißt Quadratwurzel [meist einfach „Wurzel“; der Radikator 2 wird nicht geschrieben]. Die dritte Wurzel heißt Kubikwurzel.

§ 62. Die zweite Umkehrung der Potenziation ist die Logarithmation.

**Begriff.** *Logarithmieren heißt zu einer (33) gegebenen Potenz und gegebenem Dignanden den Exponenten suchen. — Die gegebene Potenz heißt der Logarithmand; der gegebene Dignand heißt die Basis; der gesuchte Exponent heißt der Logarithmus.*

Bezeichnung des Logarithmus:  $\log_b a$  [gelesen „Logarithmus a nach b“], a der Logarithmand, b die Basis.

Beispiele.  $2^5 = 32$  folglich  $\log_2 32 = 5$   
 $10^4 = 10000$  „  $\log_{10} 10000 = 4$   
 $5^3 = 125$  „  $\log_5 125 = 3$   
 $7^2 = 49$  „  $\log_7 49 = 2$

## X. Potenzen.

Begriff siehe § 60.

§ 63. Potenz eines Produktes.

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a^3 b^3. \quad (ab)^n = a^n b^n$$



**Satz.** Die Potenz eines Produktes ist gleich **(34)**  
dem Produkte der gleichnamigen Potenzen der  
Faktoren.

$$(a b c)^n = a^n b^n c^n. \quad (2 x y)^3 = 8 x^3 y^3.$$

**§ 64. Potenz eines Quotienten.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

**Satz.** Die Potenz eines Quotienten ist gleich **(35)**  
dem Quotienten der gleichnamigen Potenzen von  
Dividend und Divisor.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (0,2)^3 = 0,008.$$

$$\left(\frac{a b}{c}\right)^n = \frac{a^n b^n}{c^n}. \quad \left(\frac{3 x}{5 y}\right)^4 = \frac{81 x^4}{625 y^4}.$$

**§ 65. Produkt von Potenzen mit gleichen Exponenten.** (Umkehrung von § 63.)

$$a^n b^n = (a b)^n.$$

**Satz.** Das Produkt von Potenzen mit gleichen **(36)**  
Exponenten ist gleich der gleichnamigen Potenz  
des Produktes der Dignanden.

$$5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000. \quad a^5 b^5 c^5 = (a b c)^5.$$

**§ 66. Quotient von Potenzen mit gleichen Exponenten.** (Umkehrung von § 64.)

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

**Satz.** Der Quotient von Potenzen mit gleichen **(37)**  
Exponenten ist gleich der gleichnamigen Potenz  
des Quotienten der Dignanden.

$$15^4 : 5^4 = (15 : 5)^4 = 3^4 = 81. \quad \frac{27 a^3}{125 b^3} = \left(\frac{3 a}{5 b}\right)^3.$$

**§ 67. Produkt von Potenzen mit gleichen Dignanden.**

$$a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7 \quad (\S 17). \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

**Satz.** Das Produkt von Potenzen mit gleichen **(38)**  
Dignanden ist gleich dem Dignanden potenziert  
mit der Summe der Exponenten.

$$a^4 b^5 \cdot a^3 b^2 = a^7 b^7. \quad a^5 = a^{3+2} = a^3 \cdot a^2. \quad a^r + s = a^r \cdot a^s$$



**§ 68. Quotient von Potenzen mit gleichen Dignanden.**

$$a^5 : a^3 = \frac{a a a a a}{a a a} = a^{5-3} = a^2. \quad a^m : a^n = a^{m-n}.$$

**Satz.** Der Quotient von Potenzen mit gleichen (39) Dignanden ist gleich dem Dignanden potenziert mit der Differenz der Exponenten.

$$\frac{a^4 b^7}{a^2 b^3} = a^2 b^4. \quad a^3 = a^{5-2} = a^5 : a^2. \quad a^{r-s} = a^r : a^s.$$

**§ 69. Besondere Fälle.**

1)  $1^n = 1.$

2)  $0^n = 0.$

3)  $a^1$ . Diese Potenz hat eigentlich erst einen Sinn, wenn wir uns denken den Ausdruck

$$x \cdot a^1.$$

Es soll hier der Zahl  $x$  einmal der Faktor  $a$  beige-  
setzt werden. Demnach ist:

$$x \cdot a^1 = x \cdot a. \quad \text{D. h.} \quad a^1 = a.$$

Diese Auffassung zeigt sich auch in Uebereinstimmung mit den Sätzen 38 und 39.

$$a^5 \cdot a = a a a a a \cdot a = a^6. \quad a^5 \cdot a = a^{5+1} = a^6.$$

$$x^4 : x = \frac{x x x x}{x} = x^3. \quad x^4 : x = x^{4-1} = x^3.$$

**Satz.** Eine Potenz mit dem Exponenten eins (40) ist gleich dem Dignanden.

4)  $a^0$ . Diese Potenz hat gleichfalls keinen unmittelbaren Sinn. Denken wir uns den Ausdruck

$$x \cdot a^0$$

so bedeutet derselbe, daß der Zahl  $x$  der Faktor  $a$  nicht mehr beige-  
gefügt werden solle. Demnach ist

$$x \cdot a^0 = x. \quad \text{D. h.} \quad a^0 = 1.$$

Diese Auffassung ist ebenfalls in Uebereinstimmung mit den Sätzen 38 und 39.

$$a^7 \cdot 1 = a^7 \cdot a^0 = a^{7+0} = a^7. \quad a^0 = a^{4-4} = a^4 : a^4 = 1.$$

**Satz.** Eine Potenz mit dem Exponenten null (41) ist gleich der Einheit.

**§ 70. Algebraische Zahlen als Exponenten** haben gleichfalls keinen unmittelbaren Sinn, indem der Exponent eine absolute Zahl sein soll. Einen Sinn gewinnen wir ebenfalls erst im Zusammenhalt mit andern Faktoren.



1)  $a^5 \cdot a^{+2}$  kann nur bedeuten, daß dem Ausdruck  $a^5$  zweimal der Faktor  $a$  beigesetzt werden soll. D. h.

$$a^5 \cdot a^{+2} = a^5 \cdot a a. \quad \text{D. h.} \quad a^{+2} = a a = a^2.$$

In Uebereinstimmung mit Satz 38. Nach diesem ist  $a^5 \cdot a^{+2} = a^{5+2} = a^7$ . od.  $a^{+2} = a^0 + 2 = a^0 \cdot a^2 = a^2$ .

2)  $a^5 \cdot a^{-2}$  kann nur bedeuten, daß in dem Ausdruck  $a^5$  der Faktor  $a$  zweimal gehoben werden soll. Demnach

$$a^5 \cdot a^{-2} = \frac{a^5}{a a}. \quad \text{D. h.} \quad a^{-2} = \frac{1}{a a} = \frac{1}{a^2}.$$

In Übereinstimmung mit Satz 38, und 39 nach welchen sich ergibt:

$$a^5 \cdot a^{-2} = a^{5-2} = a^3. \quad \text{od.} \quad a^{-2} = a^{0-2} = a^0 : a^2 = \frac{1}{a^2}.$$

$$\text{Also} \quad a^{+n} = a^n. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

**Satz.** Eine Potenz mit algebraischem Expo- (42)  
nenten ist gleich derselben Potenz mit absolutem  
Exponenten, wenn dieselbe bei positivem Expo-  
nenten als Faktor, bei negativem Exponenten als  
Divisor genommen wird.

$$\begin{aligned} a^{+7} \cdot a^{+2} &= a^{+7+2} = a^9. & a^{+7} : a^{+2} &= a^{+7-2} = a^5. \\ a^{+7} \cdot a^{-2} &= a^{+7-2} = a^5. & a^{+7} : a^{-2} &= a^{+7+2} = a^9. \\ a^{-7} \cdot a^{+2} &= a^{-7+2} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}. & a^{-7} : a^{+2} &= a^{-7-2} = a^{-9} = \frac{1}{a^9}. \\ a^{-7} \cdot a^{-2} &= a^{-7-2} = a^{-9} = \frac{1}{a^9}. & a^{-7} : a^{-2} &= a^{-7+2} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}. \end{aligned}$$

$$\frac{a^4 b^{-5}}{c^6 d^{-7}} = a^4 b^{-5} c^{-6} d^7 = \frac{a^4 d^7}{b^5 c^6}.$$

Das Rechnen mit algebraischen Exponenten ist mitunter übersichtlicher, da es die unbequeme Form der Division umgeht.

$$\begin{aligned} \frac{a^7 b^{-5}}{c^{-3} d} \cdot \frac{a^{-2} b^4}{c d^{-3}} &= a^7 b^{-5} c^3 d^{-1} \cdot a^{-2} b^4 c^{-1} d^3 = a^5 b^{-1} c^2 d^2 \\ &= \frac{a^5 c^2 d^2}{b}. \end{aligned}$$

## § 71. Potenz einer Potenz.

$$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3}. \quad (a^m)^n = a^{m n}$$

**Satz.** Die Potenz einer Potenz ist gleich dem (43)  
Dignanden potenziert mit dem Produkt der Ex-  
ponenten.

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$



$$(a^{+5})^{+2} = a^{10}. \quad (a^{+5})^{-2} = a^{-10} = \frac{1}{a^{10}}.$$

$$(a^{-5})^{+2} = a^{-10} = \frac{1}{a^{10}}. \quad (a^{-5})^{-2} = a^{10}.$$

## § 72. Algebraische Zahlen als Dignanden.

$$(+a)^n = +a^n \quad (-a)^2 = +a^2 \quad (-a)^3 = -a^3 \text{ u. s. w.}$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

**Satz.** Ein positiver Dignand gibt eine positive Potenz. — Ein negativer Dignand mit gradem Exponenten gibt eine positive Potenz. — Ein negativer Dignand mit ungradem Exponenten gibt eine negative Potenz. (44)

**§ 73. Potenz eines Aggregats** — wird im allgemeinen später behandelt. Besondere Fälle sind behandelt in § 21, 1, 3, 4.

**§ 74. Aggregat von Potenzen** — ist im allgemeinen einer Umformung nicht fähig. Besondere Fälle sind:

$$1) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). \text{ Satz 16.}$$

$$2) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$3) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$4) a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$$

$$5) a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$6) a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

u. s. w.

**§ 75. Exponentialgleichungen** — sind solche, bei welchen die Unbekannte im Exponenten steht. Man strebt beide Gleichungsseiten als Potenzen des nämlichen Dignanden herzustellen, und setzt dann die Exponenten einander gleich.

Beispiel 1.  $a^x = a^m.$

$$x = m.$$

Beispiel 2.  $a^{7x} \cdot a^5 = \frac{a^{13x}}{a}$

$$a^{7x+5} = a^{13x-1}$$

$$7x + 5 = 13x - 1$$

$$x = 1.$$



Beispiel 3.  $(5^x + 3) \cdot 4 - (2 \cdot 5^x - 1) \cdot 7 = 9$   
 $5^x = 1 = 5^0$   
 $x = 0.$

## XI. Wurzeln.

Begriff § 61.

§ 76. Aus dem Begriffe der Radikation folgt unmittelbar:

$$\left(\sqrt[r]{a}\right)^r = a. \quad \text{und} \quad \sqrt[r]{a^r} = a.$$

D.h. Eine Wurzel zur gleichnamigen Potenz erhoben giebt den Radikanden. — Oder: Aus einer Potenz die gleichnamige Wurzel gezogen giebt den Dignanden.

§ 77. Wurzel aus einer Potenz. Nach Satz 43 ist:

$$(a^m)^r = a^{mr}. \quad \text{Folglich} \quad \sqrt[r]{a^{mr}} = a^m = a^{\frac{mr}{r}}.$$

Für den Fall, daß der Exponent des Radikanden den Radikator nicht als Faktor enthält, ergiebt sich entsprechend:

$$\sqrt[r]{a^n} = a^{\frac{n}{r}}.$$

Diese Potenzform hat keinen unmittelbaren Sinn. Zur Herstellung der Übereinstimmung jedoch sind wir genötigt unter dieser Potenzform die entsprechende Wurzel zu verstehen. Daher:

**Satz.** Die Wurzel aus einer Potenz ist gleich (45) dem Dignanden potenziert mit einem Bruch: Zähler ist der Exponent des Radikanden, Nenner der Radikator.

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= a^{\frac{1}{2}}. & \sqrt[3]{x^2} &= x^{\frac{2}{3}}. & \sqrt[1]{a} &= a^1. & \sqrt[0]{p} &= p^{\frac{1}{0}} = p^{\infty} \\ \sqrt[1]{a} &= a^1. & \sqrt[2]{a} &= a^{\frac{1}{2}}. & \sqrt[3]{a} &= a^{\frac{1}{3}}. & \sqrt[4]{a} &= a^{\frac{1}{4}}. \\ \sqrt[3]{a} &= a^{\frac{1}{3}}. & \sqrt[4]{a} &= a^{\frac{1}{4}}. & \sqrt[5]{a} &= a^{\frac{1}{5}}. & \sqrt[6]{a} &= a^{\frac{1}{6}}. \\ \sqrt[6]{a} &= a^{\frac{1}{6}}. & \sqrt[7]{a} &= a^{\frac{1}{7}}. & \sqrt[8]{a} &= a^{\frac{1}{8}}. & \sqrt[9]{a} &= a^{\frac{1}{9}}. \end{aligned}$$

§ 78. Folgerungen hieraus.

$$1) \sqrt[r]{a^n} = \sqrt[r \cdot x]{a^{n \cdot x}}. \quad \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}.$$



Eine Wurzel ändert sich nicht, wenn man im Exponenten des Radikanden und im Radikator denselben Faktor beifügt oder hebt.

2) Die Gesetze über Wurzeln lassen sich demzufolge aus den entsprechenden Potenzgesetzen ableiten. Das Rechnen mit gebrochenen Exponenten ist meistens auch übersichtlicher und einfacher, da die unbequeme Form der Wurzel damit umgangen wird.

Beispiele.  $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}.$

$$\sqrt[5]{a^{17}} = a^{\frac{17}{5}} = a^3 + \frac{2}{5} = a^3 \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^3 \sqrt[5]{a^2} \text{ u. s. w.}$$

**§ 79.** Wurzeln, welche sich in der Zahlenreihe genau angeben lassen, heißen rational. Z. B.

$$\sqrt{4} = 2. \quad \sqrt{9} = 3. \quad \sqrt[3]{8} = 2. \quad \sqrt[3]{1000} = 10.$$

Die übergroße Mehrzahl der Wurzeln läßt sich jedoch nicht völlig genau angeben, sondern nur annäherungsweise bestimmen. Diese Wurzeln heißen irrational.

Z. B.  $\sqrt{2}$  liegt zwischen 1 und 2;

genauer zwischen 1,4 und 1,5;

noch genauer zwischen 1,41 „ 1,42;

„ „ „ 1,414 „ 1,415.

u. s. w.

Diese Angabe läßt sich bis zu einem beliebigen Grad der Genauigkeit fortsetzen, weshalb man den näheren dieser Gränzwerte gleich der Wurzel nimmt.

$$\sqrt{2} = 1,41421. \quad \sqrt{3} = 1,73205. \quad \text{u. s. f.}$$

**§ 80.** Wurzel aus einem Produkt. (vergl. § 63).

$$\sqrt[r]{a \cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b}.$$

**Satz.** Die Wurzel aus einem Produkt ist **(46)** gleich dem Produkt der gleichnamigen Wurzeln aus den Faktoren.

Ausscheidung rationaler Faktoren:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \sqrt{3}. \quad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt[5]{a^{17}} = \sqrt[5]{a^{15} \cdot a^2} = a^3 \sqrt[5]{a^2} \quad (\text{vergl. § 78, Beispiel}).$$



**§ 81. Wurzel aus einem Quotienten.** (vergl. § 64.)

$$\sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}.$$

**Satz.** Die Wurzel aus einem Quotienten ist **(47)** gleich dem Quotienten der gleichnamigen Wurzeln aus Dividend und Divisor.

Ausscheidung rationaler Nenner:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{6}. \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{6}.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a b}{b^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{a b}.$$

**§ 82. Produkt von Wurzeln mit gleichem Radikator.** (Umkehrung von § 80.)

$$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a b}.$$

**Satz.** Das Produkt von Wurzeln mit gleichem **(48)** Radikator ist gleich der gleichnamigen Wurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Multiplikation unter dem Wurzelzeichen:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}. \quad \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{14}. \quad 3 \sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}.$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^6} = \sqrt{a^2}.$$

**§ 83. Quotient von Wurzeln mit gleichem Radikator.** (Umkehrung von § 81.)

$$\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\frac{a}{b}}.$$

**Satz.** Der Quotient von Wurzeln mit gleichem **(49)** Radikator ist gleich der gleichnamigen Wurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

Division unter dem Wurzelzeichen:

$$\sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{5}. \quad \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^9} : \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[12]{a} \quad (\text{vergl. § 78 Beispiel.})$$

Rationalmachung des Nenners:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}. \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a}{b} \sqrt{b}.$$



$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}.$$

$$\frac{x}{\sqrt{y} - \sqrt{z}} = \frac{x(\sqrt{y} + \sqrt{z})}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} + \sqrt{z})} = \frac{x(\sqrt{y} + \sqrt{z})}{y - z}.$$

#### § 84. Wurzel aus einer Wurzel.

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \left(a^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{s}} = a^{\frac{1}{rs}} = \sqrt[rs]{a}.$$

**Satz.** Die Wurzel aus einer Wurzel ist gleich (50) dem Radikanden radiziert durch das Produkt der Radikatoren.

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}.$$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}} \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}.$$

#### § 85. Algebraische Zahlen als Radikanden. (Umkehrung von § 72.)

$$1) (+2)^3 = +8. \quad \sqrt[3]{+8} = +2. \quad \sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}.$$

$$2) (-2)^5 = -32. \quad \sqrt[5]{-32} = -2. \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

$$3) \left. \begin{array}{l} (+5)^2 = +25 \\ (-5)^2 = +25 \end{array} \right\} \text{daher} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{+25} = +5 \\ \sqrt{+25} = -5 \end{array} \right\} \sqrt{+25} = \pm 5.$$

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$$

Man heißt diese Wurzeln zweideutig, weil sie zwei Werte annehmen können.

4)  $\sqrt{-9}$  ist nicht  $(+3)$  und nicht  $(-3)$ . Diese Wurzel ist also in der Reihe der positiven und negativen Zahlen nicht auszufinden. Man heißt dieselbe imaginär. Im Gegensatz hiezu heißen die in der Zahlenreihe aufzufindenden Wurzeln reell.

**Satz.** 1) Die ungrade Wurzel aus einer positiven Zahl ist positiv. (51)

2) Die ungrade Wurzel aus einer negativen Zahl ist negativ.

3) Die grade Wurzel aus einer positiven Zahl ist entweder positiv oder negativ — zweideutig.



4) Die grade Wurzel aus einer negativen Zahl ist weder positiv noch negativ — imaginär.

Zweideutige Wurzeln zeigen an, daß auf die betreffende Frage zwei Antworten gegeben werden können. Man hüte sich vor dem Trugschluss:

$$\sqrt{16} = +4 \quad \sqrt{16} = -4 \quad \text{also } +4 = -4.$$

Imaginäre Wurzeln zeigen an, daß die betreffende Frage mit positiven oder negativen Zahlen nicht zu lösen ist, also gemeinhin unmöglich ist. Beispiele hiefür bietet insbesondere die Geometrie.

## § 86. Quadratwurzel aus besonderen Zahlen.

1) Quadratwurzel aus einer drei- bis vierziffrigen Zahl. Dieselbe besteht aus einer Zehnerstelle  $x$  und einer Einerstelle  $y$ , hat also die Form

$$10x + y.$$

Beispiel. Es sei  $\sqrt{529} = \pm (10x + y)$ .

Alsdann muß  $529 = 100x^2 + 20xy + y^2$ .

Das nächst niedrigere Quadrat unter 5 ist 4. Wir setzen daher

$$100x^2 = 400 \quad (\text{Rest } 129)$$

$$\text{d. h. } x = 2 \quad (\text{Zehnerstelle } 2).$$

Die Einerstelle erhält man aus

$$20xy = 120 \quad (\text{Rest } 9)$$

$$\text{d. h. } y = 3.$$

Der Rest 9 muß dann  $y^2$  sein, was mit  $3^2$  übereinstimmt. Also

$$\sqrt{529} = \pm 23.$$

Nach Auffindung der Einerstelle werden die zwei letzten Glieder gewöhnlich in eines zusammengefaßt:

$$20xy + y^2 = (20x + y)y.$$

Rechnungsform:  $\sqrt{5|29} = \pm 23$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 43 \overline{) 129} \\ \underline{0} \end{array}$$

Gesprochen: Abteilung 29, 5. — Wurzel aus 5 ist 2;  $2^2$  ist 4; Rest 129. — Doppelte Zehnerstelle 4; 4 in 12 geht 3 mal; Einerstelle 3, der doppelten Zehnerstelle beigesetzt. — 43 mal 3 ist 129; Rest null.

2) Quadratwurzel aus mehrziffrigen Zahlen. Man teilt den Radikanden von rechts nach links in Abteilungen von je zwei Stellen; zieht die Wurzel aus den zwei höchsten Abteilungen und sieht die gefundene zwei-



ziffrige Wurzel als Zehnerstelle an, mit deren Hülfe man die nächste Stelle findet.

$$\sqrt[25]{28|59|04|09} = \pm 5347$$

|        |       |
|--------|-------|
| 10 3   | 359   |
| 106 4  | 5004  |
| 1068 7 | 74809 |
|        | 0     |

3) Quadratwurzel aus Decimalbrüchen. Die Abteilungen vom Komma aus nach rechts und links.

Irrationale Wurzeln werden wie die Wurzeln aus Decimalbrüchen behandelt, indem man dem Radikanden beliebig viele Stellen anhängt.

**§ 87. Kubikwurzel aus besonderen Zahlen.** Das Verfahren ist im wesentlichen dasselbe wie bei der Quadratwurzel.

Es sei  $\sqrt[3]{389017} = 10x + y.$

So ist  $389017 = 1000x^3 + 300x^2y + 30xy^2 + y^3.$

Es soll  $x^3 = 389$ ; der nächst niedrigere Kubus ist 343  
(Rest 46017) d. i.  $x = 7.$

Es soll  $300x^2y = 46017. \quad y = 46017 : 14700 = 3.$

$300x^2y + 30xy^2 + y^3 = 44100 + 1890 + 27 = 46017.$

$46017 - 46017 = 0.$

Rechnungsform:  $\sqrt[3]{389|017} = 73$

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 3 · 7 <sup>2</sup> = 147 | 46017 |
|                          | 441   |
|                          | 189   |
|                          | 27    |
|                          | 0     |

**§ 88. Quadrat und Kubikwurzel aus Aggregaten.**

Beispiel 1.  $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \pm (a + b).$

$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm (a - b).$

2.  $\sqrt{a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2}$   
 $= \sqrt{(a + b - c)^2} = \pm (a + b - c).$

3.  $\sqrt{9a^4 + 30a^3 - 17a^2 - 70a + 49}$   
 $= \pm (x + y + z.)$



$$x^2 = 9a^4. \quad \text{d. h. } x = 3a^2.$$

$$2xy = 30a^3 \quad \text{,, } y = 5a.$$

$$2xy + y^2 = 30a^3 + 25a^2. \quad \text{Rest } -42a^2 - 70a + 49.$$

$$2xz = -42a^2. \quad z = -7.$$

$$2xz + 2yz + z^2 = -42a^2 - 70a + 49. \quad \text{Rest } 0.$$

Rechnungsform:

$$\sqrt[3]{9a^4 + 30a^3 - 17a^2 - 70a + 49} = \pm (3a^2 + 5a - 7).$$

$$\begin{array}{r|l} 6a^2 & + 30a^3 - 17a^2 \\ & + 30a^3 + 25a^2 \\ \hline & - 42a^2 - 70a + 49 \\ & - 42a^2 - 70a + 49 \\ & + \quad + \quad - \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$4) \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = \sqrt[3]{(a + b)^3} = a + b.$$

$$\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} = \sqrt[3]{(a - b)^3} = a - b.$$

**§ 89. Wurzelgleichungen** sind solche, bei denen die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen steht.

1) Einfache Wurzelgleichungen, sind solche, in denen nur eine Wurzelgröße vorkommt und außer derselben lauter bekannte Zahlen. Man löst die Gleichung für diese Wurzelgröße als Unbekannte auf und erhebt dann beide Gleichungsseiten in die entsprechende Potenz.

Beispiel.  $(2 \sqrt[3]{x} + 1) \cdot 4 - (5 \sqrt[3]{x} - 3) \cdot 2 = 4$

$$\sqrt[3]{x} = 3$$

$$x = 27$$

2) Kommen mehrere Wurzelgrößen vor, oder steht die Unbekannte auch noch außerhalb des Wurzelzeichens, so ist zunächst eine der Wurzeln auf einer Gleichungsseite allein zu stellen (isolieren) und dann sind beide Gleichungsseiten in die entsprechende Potenz zu erheben. Im allgemeinen ergeben sich hierbei Gleichungen von höherem Grade.

Beispiel.  $\sqrt{7 + x} + \sqrt{x} = 7$

$$\sqrt{7 + x} = 7 - \sqrt{x}$$



$$7 + x = 49 - 14 \sqrt{x} + x$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9.$$

## XII. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

**§ 90.** Eine Gleichung heißt quadratisch oder vom zweiten Grad, wenn dieselbe in ihrer einfachsten Form höchstens die zweite Potenz der Unbekannten enthält.

Kommt in der Gleichung nur das Quadrat der Unbekannten vor, so heißt die Gleichung reinquadratisch. — Kommt neben der zweiten Potenz auch noch die erste Potenz der Unbekannten vor, so heißt die Gleichung gemischt quadratisch.

Reinquadratische Gleichungen werden gelöst, indem man zunächst das Quadrat der Unbekannten sucht, und dann beiderseits die Quadratwurzel zieht.

Wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel ergibt jede quadratische Gleichung zwei Werte der Unbekannten ( $x_1$  und  $x_2$ ). Dieselben heißen die Wurzeln der Gleichung.

Beispiel.  $(7x^2 - 5) \cdot 2 - (4x^2 - 3) \cdot 3 = 7$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = + 2$$

$$x_2 = - 2$$

**§ 91. Gemischt quadratische Gleichung — einfache Form.** Dieselbe ist:

$$x^2 + P x + Q = 0.$$

wobei P und Q bekannte Zahlen oder Zahlenausdrücke bedeuten. Die Lösung geht auf folgende Weise vor sich:

$$x^2 + P x = - Q.$$

Um nun links die Quadratwurzel ausziehen zu können, bringt man die linke Seite auf die Form des Quadrates eines Binoms ( $a^2 + 2ab + b^2$ ). Es paßt hier  $x^2$  auf  $a^2$ , d. h.  $a = x$ . Es paßt ferner  $Px$  auf  $2ab$ , d. h.  $b = \frac{1}{2} P$ .

Es fehlt noch  $b^2$  oder  $\left(\frac{1}{2} P\right)^2$ . Nachdem man dieses Glied beiderseits addiert, wird aus beiden Gleichungsseiten die Quadratwurzel gezogen und damit ergibt sich die Lösung.



$$x^2 + Px + \left(\frac{1}{2}P\right)^2 = \left(\frac{1}{2}P\right)^2 - Q$$

$$x + \frac{1}{2}P = \sqrt{\left(\frac{1}{2}P\right)^2 - Q}$$

$$x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}P\right)^2 - Q}.$$

Diese Addition des Gliedes  $\left(\frac{1}{2}P\right)^2$  heißt quadratische Ergänzung.

Beispiel 1.

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$x^2 + 12x = -35$$

$$x^2 - 12x + (-6)^2 = 36 - 35$$

$$x - 6 = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$x = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 5.$$

Beispiel 2.

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$x^2 + 7x = 60$$

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + 60$$

$$x + \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \pm \frac{17}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} \pm \frac{17}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -12.$$

**§ 92. Gemischt quadratische Gleichung — allgemeine Form.** Dieselbe ist

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

wobei A, B, C bekannte Zahlen oder Zahlenausdrücke bedeuten. Dieselbe läßt sich auf die einfache Form zurückführen:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0,$$

und dann ergibt sich nach der quadratischen Ergänzung

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

$$x + \frac{B}{2A} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$x = \frac{1}{2A} \cdot \left[ -B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right]$$

$$= \frac{1}{A} \left[ -\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}B\right)^2 - AC} \right] \quad (52)$$



Letztere Formel ist von Vorteil, wenn B den Faktor 2 enthält.

Beispiel 1.  $7x^2 + 17x - 62 = 0$

$$x = \frac{1}{14} \cdot \left[ -17 + \sqrt{289 + 1736} \right]$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \left[ -17 \pm 45 \right]$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{62}{14} = -\frac{31}{7}.$$

Beispiel 2.  $5x^2 - 16x - 45 = 0$

$$x = \frac{1}{5} \left[ 8 + \sqrt{64 + 225} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[ 8 \pm 17 \right]$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -\frac{9}{5}.$$

**§ 93.** Aus der einfachen Form der gemischt quadratischen Gleichung:

$$x^2 + Px + Q = 0$$

ergiebt sich:  $x_1 = -\frac{1}{2}P + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P\right)^2 - Q}$

$$x_2 = -\frac{1}{2}P - \sqrt{\left(\frac{1}{2}P\right)^2 - Q}$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -P \\ x_1 \cdot x_2 = Q \end{array} \right\} \quad (53)$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist die Lösung einer gemischt quadratischen Gleichung zurückgeführt auf folgende Aufgabe. Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe und Produkt gegeben ist.

Dies ist dasselbe als die Lösung folgenden Gleichungssystems für die Unbekannten u und v:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } u + v = s \\ \text{II } u \cdot v = p \end{array} \right\}$$

Erste Lösung durch Erraten — häufig anwendbar, wenn p sich leicht in zwei Faktoren zerlegen läßt, deren Summe s ist. Z. B.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } u + v = 12 \\ \text{II } uv = 35 \end{array} \right\} \quad u = 7 \quad v = 5.$$



Zweite Lösung durch Substitution:

$$\begin{array}{l} \text{Aus I} \quad v = s - u \\ \text{Substituiert in II} \dots \quad \text{III} \quad u(s - u) = p \\ \quad \quad \quad u^2 - su = -p \\ u = \frac{1}{2}s + \sqrt{\left(\frac{1}{2}s\right)^2 - p} \quad v = \frac{1}{2}s - \sqrt{\left(\frac{1}{2}s\right)^2 - p}. \end{array}$$

Dritte Lösung (die gebräuchlichste):

$$\begin{array}{l} \text{I}^2 - 4 \cdot \text{II} \dots \quad \text{III} \quad u^2 - 2uv + v^2 = s^2 - 4p \\ \quad \quad \quad u - v = \sqrt{s^2 - 4p} \\ u = \frac{1}{2} \left[ s + \sqrt{s^2 - 4p} \right] \quad v = \frac{1}{2} \left[ s - \sqrt{s^2 - 4p} \right]. \end{array}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{l} x^2 - 11x - 60 = 0 \\ \text{I} \quad x_1 + x_2 = 11 \quad \left\{ \right. \\ \text{II} \quad x_1 \cdot x_2 = -60 \quad \left. \right\} \\ \text{I}^2 - 4 \cdot \text{II} \dots \quad \text{III} \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 121 + 240 = 361 \\ \quad \quad \quad x_1 - x_2 = 19 \\ x_1 = \frac{1}{2}(11 + 19) = 15 \quad x_2 = -4. \end{array}$$

**§ 94.** 1) Aufgabe. Eine quadratische Gleichung zu bilden, deren Wurzeln gegeben sind.

Beispiel.  $x_1 = 8 \quad x_2 = 5$ . So ist  $P = -(x_1 + x_2) = -13$   
 $Q = x_1 x_2 = 40$ .

Gleichung.  $x^2 - 13x + 40 = 0$ .

2) Aufgabe. Aus einer gegebenen quadratischen Gleichung eine neue zu bilden, deren Wurzeln beide um eine bestimmte Zahl größer oder kleiner sind, als die der gegebenen Gleichung.

Beispiel. Gegebene Gleichung:  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .

Gesuchte Gleichung:  $u^2 + Mu + N = 0$ .

Es soll  $u_1 = x_1 + 3 \quad u_2 = x_2 + 3$ .

Es ist  $M = -(u_1 + u_2) = -(x_1 + x_2 + 6) = -13$

$$\begin{aligned} N &= u_1 u_2 = x_1 x_2 + 3 \cdot (x_1 + x_2) + 9 \\ &= 10 + 21 + 9 = 40. \end{aligned}$$

Gesuchte Gleichung:  $u^2 - 13u + 40 = 0$ .

3) Aufgabe. Aus einer gegebenen quadratischen Gleichung eine neue zu bilden, deren Wurzeln beide das  $n$ -fache der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.



Beispiel. Gegebene Gleichung:  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .

Gesuchte Gleichung:  $u^2 + Mu + N = 0$ .

Es soll:  $u_1 = 3x_1$   $u_2 = 3x_2$ .

Es ist  $M = -(u_1 + u_2) = -3 \cdot (x_1 + x_2) = -21$

$N = u_1 u_2 = 9 \cdot x_1 x_2 = 90$ .

Gesuchte Gleichung:  $u^2 - 21u + 90 = 0$ .

**§ 95. Quadratisches Trinom** heißt ein Ausdruck von der Form

$$r^2 + Mr + N,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß die Ausdrücke  $M$  und  $N$  die Größe  $r$  nicht enthalten.

Denken wir uns dieses Trinom gleich null gesetzt und nach der Unbekannten  $r$  aufgelöst, so ist

$$M = -(r_1 + r_2) \quad N = r_1 \cdot r_2.$$

$$\text{Somit: } r^2 + Mr + N = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2 \\ = (r - r_1) \cdot (r - r_2).$$

Damit ist gelöst die Aufgabe: ein quadratisches Trinom in Faktoren zu zerlegen.

Beispiel. Das Trinom:

$$a^2 - 15a + 44$$

in zwei Faktoren zu zerlegen.

Wir schreiben an die Gleichung:  $a^2 - 15a + 44 = 0$ , und erhalten hieraus  $a_1 = 11$   $a_2 = 4$ .

Demnach:  $a^2 - 15a + 44 = (a - 11)(a - 4)$ .

Die Auflösung einer gemischt quadratischen Gleichung ist sonach ganz dieselbe als die, das Trinom der Gleichung in Faktoren zu zerlegen.

Hat man die Gleichung

$$x^2 + Px + Q = 0$$

umgewandelt in

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

so bedenke man, daß ein Produkt null wird, wenn einer der Faktoren null ist, und es ergibt sich

$$x = x_1 \quad \text{oder} \quad x = x_2.$$

**§ 96. Ausdrücke von der Form:**

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

gestatten oft die Zerlegung in Summe oder Differenz zweier Wurzeln.

Beispiel. Es sei  $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \pm (\sqrt{u} - \sqrt{v})$ .

So soll  $14 - 6\sqrt{5} = u - 2\sqrt{uv} + v$ .



Dies kann nur sein, wenn das rationale Glied links gleich ist dem rationalen Glied rechts, und ebenso das irrationale Glied links gleich dem irrationalen Glied rechts ist; d. h. wenn

$$\begin{array}{l} \text{I } u + v = 14 \\ \text{II } 2 \sqrt{uv} = 6 \sqrt{5} \\ \text{I}^2 - \text{II}^2 \dots \text{III } u^2 - 2uv + v^2 = 16 \\ \qquad \qquad \qquad u - v = 4 \\ \qquad \qquad \qquad u = 9 \qquad v = 5. \end{array}$$

$$\sqrt{14} - 6 \sqrt{5} = \pm (\sqrt{9} - \sqrt{5}) = \pm (3 - \sqrt{5}).$$

**§ 97.** Gleichungen höheren Grades lassen sich mitunter auf quadratische Gleichungen zurückführen. Hieher gehören vor allem Gleichungen von der Form:

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0.$$

Dieselben werden für die Unbekannte  $x^n$  aufgelöst.

Beispiel 1.

$$\begin{array}{l} x^4 - 13x^2 + 36 = 0. \\ (x^2)_1 = 9 \qquad (x^2)_2 = 4 \\ x_1 = + 3 \qquad x_3 = + 2 \\ x_2 = - 3. \qquad x_4 = - 2. \end{array}$$

Beispiel 2.

$$\sqrt[3]{5x + 4} + \sqrt[6]{5x + 4} = 6.$$

Es sei  $\sqrt[6]{5x + 4} = u$ , so ist

$$\sqrt[3]{5x + 4} = u^2$$

$$u^2 + u - 6 = 0$$

$$u_1 = 2. \qquad u_2 = - 3$$

$$x_1 = 12. \qquad x_2 = 145.$$

**§ 98. Reziproke Gleichungen** heißen Gleichungen, bei welchen das erste und letzte, das zweite und vorletzte Glied u. s. w. den nämlichen Faktor, immer mit dem gleichen oder immer mit entgegengesetztem Vorzeichen haben.

1) Reziproke Gleichungen dritten Grads.

Beispiel 1.

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

$$a \cdot (x^3 + 1) + bx \cdot (x + 1) = 0$$

$$(x + 1) \cdot [a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad | \quad ax^2 - (a - b)x$$

$$x_1 = - 1. \quad | \quad + a = 0$$

u. s. w.

Beispiel 2.

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

$$a(x^3 - 1) + bx(x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \cdot [a(x^2 + x + 1) + bx] = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad | \quad ax^2 + (a + b)x$$

$$x_1 = 1. \quad | \quad + a = 0$$

u. s. w.



## 2) Reziproke Gleichung vierten Grads.

Beispiel 1.  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 

$$ax^2 + bx + c + b \cdot \frac{1}{x} + a \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Es sei  $x + \frac{1}{x} = u$ . So ist  $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$ ,

womit die Aufgabe sich löst.

Beispiel 2.  $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$ 

$$a \cdot (x^4 - 1) + bx \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1) \cdot [a(x^2 + 1) + bx] = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1.$$

$$ax^2 + bx + a = 0$$

u. s. w.

Wenn nicht, wie hier, der Faktor von  $x^2$  null ist, ist die Gleichung nicht auf eine quadratische Gleichung zurückzuführen.

3) Reziproke Gleichungen fünften Grads lassen sich wie in 1) auf solche vom vierten Grad zurückführen. Ebenso kann man [unter der oben gegebenen Einschränkung] reziproke Gleichungen sechsten Grads nach dem Verfahren 2) auf solche vom dritten Grad zurückführen.

**§ 99. Gleichungen höheren Grades** lassen sich im allgemeinen auf die Form bringen:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0.$$

Nach Analogie der quadratischen Gleichungen wird anzunehmen sein, daß eine solche Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades auch  $n$  Wurzeln habe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , und daß sich das Polynom der Gleichung umwandeln lasse in das Produkt:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Dies vorausgesetzt muß sein:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -A_1$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n = A_2$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n A_n.$$

Diese letztere Gleichung bietet häufig die Möglichkeit zur Auffindung einer oder mehrerer Wurzeln der Gleichung.

Beispiel.  $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$ Es muß  $x_1 x_2 x_3 = +30.$ 

Man versucht etwa  $x_1 = 2$ . Dann muß das Polynom der Gleichung den Faktor  $(x - 2)$  enthalten. Es ergibt sich:

$$(x^3 - 10x^2 + 31x - 30) : (x - 2) = x^2 - 8x + 15.$$



Daher heißt die Gleichung:

$$\begin{array}{l|l} (x-2)(x^2-8x+15)=0 & \\ x-2=0 & x^2-8x+15=0 \\ x_1=2. & x_2=3 \quad x_3=5. \end{array}$$

### XIII. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

**§ 100.** Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten heißen quadratisch oder vom zweiten Grad, wenn in denselben in ihrer einfachsten Form höchstens die zweite Potenz der Unbekannten oder auch das Produkt der Unbekannten vorkommt.

Die allgemeine Lösung eines solchen Systems von zwei quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten würde nach der Substitutions- oder Komparationsmethode auf eine Gleichung vierten Grades führen, welche im allgemeinen nicht lösbar sein wird.

In besonderen Fällen sind jedoch auch solche Systeme lösbar. Die wichtigsten dieser Fälle sind die folgenden:

**§ 101. Erster Fall.** Eine der Gleichungen ist linear. Durch Substitution immer lösbar:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } ax + by = c \\ \text{II } mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0 \end{array} \right\}$$

Aus I . . . . .  $y = \frac{c - ax}{b}.$

Durch Substitution in II erhält man eine quadratische Gleichung.

Mitunter gelingt es, auch wenn beide Gleichungen quadratisch sind, aus denselben eine dritte lineäre abzuleiten.

$$\text{Beispiel. } \left. \begin{array}{l} \text{I } 3x^2 + 6xy + 12y^2 + ax + by = m \\ \text{II } 4x^2 + 8xy + 16y^2 + cx + dy = n \end{array} \right\}$$

$$\text{I} \cdot 4 - \text{II} \cdot 3 \dots \text{III } (4a - 3c)x + (4b - 3d)y = 4m - 3n$$

u. s. w.

**§ 102. Zweiter Fall.** Das Verhältniß der Unbekannten ist gegeben. Kann behandelt werden nach dem ersten Fall, oder schöner durch die bekannte Auflösung des Verhältnisses in zwei Gleichungen.

Vergleiche § 45, sowie § 55, 2 und 3.



Beispiel.

$$\begin{array}{l} \text{I } 4x^2 - 11y^2 = 4 \\ \text{II } x : y = 5 : 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } 4x^2 - 11y^2 = 4 \\ \text{II } x : y = 5 : 3 \end{array}} \right\}$$

Aus II . . . .

$$\begin{array}{l} x = 5u \\ y = 3u \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = 5u \\ y = 3u \end{array}} \right\}$$

Substituiert in I . . . . III  $4 \cdot (5u)^2 - 11 \cdot (3u)^2 = 4$ 

$$u^2 = 4.$$

$$u_1 = + 2$$

$$x_1 = + 10$$

$$y_1 = + 6$$

$$u_2 = - 2$$

$$x_2 = - 10$$

$$y_2 = - 6$$

**§ 103. Dritter Fall.** Eine der Gleichungen ist homogen quadratisch, d. h. sie enthält nur Glieder mit  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ . Eine solche Gleichung bestimmt das Verhältniß der Unbekannten, und dann verfährt man nach dem zweiten Fall.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

$$a \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + b \cdot \frac{x}{y} + c = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2a} \left[ -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right].$$

**§ 104. Vierter Fall.** Beide Gleichungen sind reinquadratisch, d. h. sie enthalten nur Glieder mit  $x^2$  und  $y^2$  und außerdem noch bekannte Glieder.

Beispiel.

$$\text{I } 3x^2 + 5y^2 = 47$$

$$\text{II } 4x^2 - 3y^2 = 24$$

$$x^2 = 9$$

$$y^2 = 4$$

$$x_1 = + 3$$

$$x_2 = - 3$$

$$y_1 = + 2$$

$$y_2 = - 2.$$

**§ 105. Fünfter Fall.** Beide Gleichungen enthalten außer dem bekannten Glied nur Glieder mit  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ . Durch Elimination dieses bekannten Gliedes erhält man eine homogen quadratische Gleichung und damit den dritten Fall.

$$\text{I } ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

$$\text{II } dx^2 + exy + fy^2 = n$$

$$\text{I} \cdot n + \text{II} \cdot (-m) \dots$$

$$\text{III } (an - dm) x^2 + (bn - em) xy + (cn - fm) y^2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

**§ 106.** Sehr häufig läuft die Lösung der Gleichung hinaus auf den Fall, daß gegeben sind Summe oder Differenz und Produkt. Die Lösung ist dann möglich durch sofortiges Erraten, oder durch Substitution nach dem ersten Fall, oder am besten auf folgende Art (vergl. § 93).



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\left. \begin{array}{l} \text{I } x + y = s \\ \text{II } xy = p \end{array} \right\}$ $\text{I}^2 - 4 \cdot \text{II} \dots$ $\text{III } x^2 - 2xy + y^2 = s^2 - 4p$ $x - y = \sqrt{s^2 - 4p}$ $x = \frac{1}{2} \left( s + \sqrt{s^2 - 4p} \right)$ $y = \frac{1}{2} \left( s - \sqrt{s^2 - 4p} \right)$ | $\left. \begin{array}{l} \text{I } x - y = d \\ \text{II } xy = p \end{array} \right\}$ $\text{I}^2 + 4 \cdot \text{II} \dots$ $\text{III } x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 4p$ $x + y = \sqrt{d^2 + 4p}$ $x = \frac{1}{2} \left( d + \sqrt{d^2 + 4p} \right)$ $y = \frac{1}{2} \left( -d + \sqrt{d^2 + 4p} \right)$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Wegen der Zweideutigkeit der Wurzel zwei Wertepaare, die aber eigentlich dasselbe sind.

|                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Beispiel 1. <math>\left. \begin{array}{l} \text{I } x^2 + y^2 = a \\ \text{II } x + y = b \end{array} \right\}</math></p> $\text{II}^2 - \text{I} \dots \text{III } 2xy = b^2 - a.$ | <p><math>\left. \begin{array}{l} \text{I } x^2 + y^2 = a \\ \text{II } x - y = b \end{array} \right\}</math></p> $- 2xy = b^2 - a.$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                  |                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| <p>Beispiel 2.</p> $\left. \begin{array}{l} \text{I } x^2 + y^2 = a \\ \text{II } xy = b \end{array} \right\}$ $\text{I} + 2 \cdot \text{II} \dots \text{III } x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b$ $x + y = \sqrt{a + 2b}$ | <p style="text-align: center;">u. s. w.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Beispiel 3. <math>\left. \begin{array}{l} \text{I } x^3 + y^3 = a \\ \text{II } x + y = b \end{array} \right\}</math></p> $\text{II}^3 - \text{I} \dots$ $\text{III } 3x^2y + 3xy^2 = b^3 - a.$ $xy \cdot (x + y) = \frac{1}{3} (b^3 - a)$ | <p style="text-align: center;">u. s. w.</p> $\left. \begin{array}{l} \text{I } x^3 - y^3 = a \\ \text{II } x - y = b \end{array} \right\}$ $- 3x^2y + 3xy^2 = b^3 - a$ $xy (x - y) = \frac{1}{3} (a - b^3)$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

II substituiert in III giebt

|                                                                                    |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $xy = \frac{\frac{1}{3} (b^3 - a)}{b}$ <p style="text-align: center;">u. s. w.</p> | $xy = \frac{\frac{1}{3} (a - b^3)}{b}$ <p style="text-align: center;">u. s. w.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| <p>Beispiel 4.</p> $\left. \begin{array}{l} \text{I } x^4 + y^4 = 17 \\ \text{II } x + y = 3 \end{array} \right\}$ $\text{II}^4 - \text{I} \dots \text{III } 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 64$ $4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = 64$ $\text{II}^2 \dots \text{IV } x^2 + 2xy + y^2 = 9$ $x^2 + y^2 = 9 - 2xy$ $\text{IV substituiert in III} \dots \text{V } 4xy \cdot (9 - 2xy) + 6x^2y^2 = 64$ $x^2y^2 - 18xy + 32 = 0$ $(xy)_1 = 16 \quad (xy)_2 = 2.$ <p style="text-align: center;">u. s. w.</p> | <p style="text-align: center;">u. s. w.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|



### § 107. Andere Fälle.

|                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Beispiel 1. $\left. \begin{array}{l} \text{I } x^2 - y^2 = a \\ \text{II } x + y = b \end{array} \right\}$<br>$\text{I:II} \dots \text{III. } x - y = \frac{a}{b}$ | $\left. \begin{array}{l} \text{I } x^2 - y^2 = a \\ \text{II } x - y = b \end{array} \right\}$<br>$\text{III } x + y = \frac{a}{b}$ |
| u. s. w.                                                                                                                                                           |                                                                                                                                     |

Beispiel 2.  $\left. \begin{array}{l} \text{I } xy = a \\ \text{II } \frac{x}{y} = b \end{array} \right\}$   
 $\text{I} \cdot \text{II} \dots \text{III } x^2 = ab$   
 $x = \sqrt{ab}$   
 $\text{I:II} \dots \text{IV } y^2 = \frac{a}{b}$   
 $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Beispiel 3.  $\left. \begin{array}{l} \text{I } x^3 + y^3 = a \\ \text{II } xy = b \end{array} \right\}$   
 Aus II.  $y = \frac{b}{x}$   
 Substituiert in I...  
 $\text{III } x^3 + \left(\frac{b}{x}\right)^3 = a$   
 $x^6 - ax^3 + b = 0$   
 $x^3 = \dots$   
 u. s. w.

**§ 108.** Ein System von drei oder mehr quadratischen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten führt natürlich zu noch größeren Verwicklungen und ist im allgemeinen unlösbar.

Lösbar ist insbesondere der Fall, wenn zwei Gleichungen linear sind. Man drückt mittelst dieser zwei Gleichungen zwei Unbekannte durch die dritte aus, und substituiert die erhaltenen Ausdrücke in die dritte Gleichung.

Ist das Verhältniß der Unbekannten gegeben, so ist die Lösung glatt, wenn man das Verhältniß auf bekannte Art in ein System von Gleichungen auflöst.

Beispiel 1.  $\left. \begin{array}{l} \text{I } 5x + 7y - 2z = 10 \\ \text{II } 3x - 4y + 5z = 4 \\ \text{III } x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{array} \right\}$

Aus I und II folgt IV  $x = \frac{1}{41} (68 - 27z)$

IV  $y = \frac{1}{41} (10 + 31z)$

Substituiert in III giebt eine quadratische Gleichung mit der einen Unbekannten z.

Beispiel 2. I, II, III  $x : y : z : u = m : n : p : q$ .  
 IV  $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = e$

Aus I, II, III...  $x = mv, y = nv, z = pv, u = qv$ .

Substituiert in IV ergiebt eine quadratische Gleichung mit der einen Unbekannten u.



## XIV. Logarithmen.

Begriff § 62.

**§ 109.** Aus dem Begriffe der Logarithmation folgt unmittelbar: Die Basis mit dem Logarithmus potenziert giebt den Logarithmanden.

Wenn  $\log_{\beta} a = m$  so ist  $\beta^m = a$ .

### § 110. Logarithmus eines Produkts.

Es sei  $\log_{\beta} a = m$   $\log_{\beta} b = n$ ; gesucht  $\log_{\beta} (a b) = x$ .  
 So ist  $\beta^m = a$   $\beta^n = b$   $\beta^x = a b$   
 $\beta^{m+n} = a b = \beta^x$

d. h.  $x = m + n$

oder  $\log_{\beta} (a b) = \log_{\beta} a + \log_{\beta} b$ .

**Satz.** Der Logarithmus eines Produkts ist gleich (54)  
 der Summe der Logarithmen der Faktoren.

$$\log_{\beta} (a b c) = \log_{\beta} a + \log_{\beta} b + \log_{\beta} c.$$

**§ 111. Logarithmus eines Quotienten.** Aus § 110  
 oder selbständig folgt

$$\log_{\beta} \left( \frac{a}{b} \right) = \log_{\beta} a - \log_{\beta} b$$

**Satz.** Der Logarithmus eines Quotienten ist (55)  
 gleich der Differenz der Logarithmen von Divi-  
 dend und Divisor.

### § 112. Logarithmus einer Potenz.

$$\log_{\beta} (a^n) = n \log_{\beta} a$$

**Satz.** Der Logarithmus einer Potenz ist gleich (56)  
 dem Logarithmus des Dignanden multipliziert mit  
 dem Exponenten.

### § 113. Logarithmus einer Wurzel.

$$\log_{\beta} \sqrt[r]{a} = \frac{1}{r} \log_{\beta} a$$

**Satz.** Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich (57)



*dem Logarithmus des Radikanden dividiert durch den Radikator.*

Der Logarithmus eines Aggregats läßt sich nicht durch die Logarithmen der einzelnen Glieder ausdrücken. Produkt, Quotient, Potenz und Wurzel heißen daher logarithmable Ausdrücke, während das Aggregat nicht logarithmabel ist.

**§ 114.** **Logarithmensystem** ist die Zusammenstellung der Logarithmen aller Zahlen für eine und dieselbe Basis.

1) Für jedes Logarithmensystem gilt:

$$\log_{\beta} 1 = 0. \quad \log_{\beta} \beta = 1.$$

**Satz.** Für jedes Logarithmensystem ist der **(58)** Logarithmus der Einheit null, der Logarithmus der Basis eins.

2) Wenn die Basis größer als eins ist, sind die Logarithmen aller Zahlen über eins positiv, die Logarithmen aller Zahlen unter eins negativ. Der Logarithmus der Null ist negativ unendlich groß.

3) Wenn die Basis positiv ist, sind die Logarithmen aller positiven Zahlen reell, die Logarithmen aller negativen Zahlen imaginär.

**§ 115.** **Brigg'sches Logarithmensystem.** Dieses in der Elementarmathematik ausschließlich gebrauchte Logarithmensystem hat als Basis die Zahl zehn. Diese Basis wird weder geschrieben noch gelesen.

Für das Brigg'sche Logarithmensystem gilt das in § 114, 2 u. 3 Bemerkte.

**§ 116.** Es ist

$$\begin{array}{ll} \log 1 & = 0 \\ \log 10 & = 1 \\ \log 100 & = 2 \\ \log 1000 & = 3 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \log 0,1 & = -1 \\ \log 0,01 & = -2 \\ \log 0,001 & = -3 \end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

**Satz.** Die Brigg'schen Logarithmen der Po- **(59)** tenzen von zehn sind ganze Zahlen mit soviel Einheiten als der Logarithmand Nullen hat, und zwar positiv, wenn die Nullen rechts stehen, negativ, wenn die Nullen links stehen.

**§ 117.** Die Brigg'schen Logarithmen aller andern



Zahlen ausser den Potenzen von zehn sind irrational. Dieselben werden gewöhnlich in Form von Decimalbrüchen mit fünf Stellen angegeben. Die Stelle vor dem Komma heißt die Charakteristik, die Stellen nach dem Komma heißen die Mantisse.

a) Die Charakteristik richtet sich ausschließlich nach der höchsten Stelle des Logarithmanden.

$\log 517$  liegt zwischen  $\left\{ \begin{array}{l} \log 100 = 2 \\ \log 1000 = 3 \end{array} \right\}$  also  $\log 517 = 2, \dots$

$\log 7435659 = 6, \dots$  (höchste Stelle Millionen)

$\log 5 = 0, \dots$  (höchste Stelle Einer)

$\log 0,03 = \log 3 - \log 100 = 0, \dots - 2$  (höchste Stelle Hundertel).

b) Es ist z. B.  $\log 318 = 2,50243$ .

Dann ist:  $\log 3180 = \log 318 + \log 10 = 3,50243$ .

$\log 318000 = 5,50243$ .

$\log 3,18 = 0,50243$ .

$\log 0,00318 = 0,50243 - 3$ .

D. h. Die Mantisse richtet sich ausschließlich nach der Ziffernfolge des Logarithmanden, dem sogenannten Numerus.

**§ 118. Logarithmentafeln** sind Zusammenstellungen der Mantissen für alle vierstellige Numerus. Mit Hülfe der Einschaltungstafeln (partes proportionales) kann man auch für fünf und sechsstellige Numerus die Mantissen bestimmen.

Die Berechnung der Mantissen ist elementarmathematisch außerordentlich weitläufig; die höhere Mathematik hat einfachere Verfahrensweisen an die Hand gegeben. — Selbstständig zu berechnen braucht man nur die Logarithmen aller Primzahlen (5 ausgenommen.)

1) Aufgabe. Zu einem gegebenen Logarithmanden den Logarithmus suchen (Logarithmieren).

Beispiel 1.  $\log 34,57$ .

Charakteristik 1,  $\dots$

Aufgeschlagen Numerus 3457.

Zugehörige Mantisse 53870.

$\log 34,57 = 1,53870$ .

Beispiel 2.  $\log 0,13854$ .

Charakteristik 0,  $\dots - 1$ .

Aufgeschlagen Numerus 1385.

Zugehörige Mantisse 14145.

Differenz 145 bis 176 ist 31.

Pars proportionalis für 4 ist

12,4 rund 12.

$\log 0,13854 = 0,14157 - 1$ .



2) Aufgabe. Zu einem gegebenen Logarithmus den Logarithmanden suchen. (Delogarithmieren).

Beispiel 1.

$$0,75028 = \log \dots$$

Höchste Stelle Einer.

Aufgeschlagen Mantisse

75 028.

Zugehöriger Numerus 5627.

$$0,75028 = \log 5,627.$$

Beispiel 2.

$$3,05867 = \log \dots$$

Höchste Stelle Tausender.

Aufgeschlagen Mantisse

05 867;

(nächst niedriger 05 843).

Zugehöriger Numerus 1144.

Differenz 843 bis 881 ist 38.

843 bis 867 ist 24. 24 ist p. p.

für 6.

$$3,05867 = \log 1144,6.$$

### § 119. Rechnung mit Logarithmen.

Beispiel 1. Zu berechnen der Ausdruck

$$\frac{1,437^3 \cdot 2,008^4}{3,5294^2} = x.$$

$$\log x = 3 \log 1,437 = 3 \cdot 0,15746 = 0,47238$$

$$+ 4 \log 2,008 + 4 \cdot 0,30276 + 1,21104$$

$$- 2 \log 3,5294 - 2 \cdot 0,54770 - 1,09540$$

$$= 0,58802 = \log 3,8727$$

$$x = 3,8727.$$

$$\text{Beispiel 2. } \sqrt[5]{\frac{57,683}{2,189^3}} = x.$$

$$\log x = \frac{1}{5} \log 57,683 = \frac{1}{5} \cdot 1,76105 = 0,35221 = 1,35221$$

$$- 3 \log 2,189 - 3 \cdot 0,34025 - 1,02075 - 1,02075 - 1$$

$$= 0,33146 - 1$$

$$x = 0,21452.$$

$$= \log 0,21452$$

Negative Mantissen werden vermieden, da die Tafel nur positive Mantissen enthält. Man umgeht dieselben, indem man der Charakteristik des Minuenden hinreichend viele positive Einheiten beifügt, und die gleiche Zahl dann als negative Einheiten ansetzt.

$$\text{Beispiel 3. } \sqrt[7]{\frac{519,24}{1079,7}} = x.$$



$$\begin{aligned}\log x &= \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} \log 519,24 \\ -\log 1079,7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 2,71537 \\ -3,03330 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot (0,68207 - 1) \\ &= \frac{1}{7} \cdot (6,68207 - 7) \\ &= 0,95458 - 1 = \log 0,9007 \\ x &= 0,9007.\end{aligned}$$

Negativ gebrochene Charakteristiken werden umgangen, indem man der negativen Charakteristik soviel Einheiten zufügt, daß dieselbe durch den Divisor teilbar wird. Die gleiche Anzahl positiver Einheiten ist alsdann auch dem Minuenden beizusetzen.

Beispiel 4.  $\sqrt[3]{-1,576^4} + \sqrt[5]{8,72} = x.$

Es sei  $1,576^4 = y.$

$$\log y = 4 \log 1,576 = 4 \cdot 0,19756 = 0,79024 = \log 6,1694$$

$$y = 6,1694.$$

$$\sqrt[5]{8,72} = z.$$

$$\begin{aligned}\log z &= \frac{1}{5} \log 8,72 = \frac{1}{5} \cdot 0,94052 = 0,18810 \\ &= \log 1,5421 \quad z = 1,5421.\end{aligned}$$

$$x = \sqrt[3]{-6,1694 + 1,5421} = -\sqrt[3]{4,6273}$$

$$\begin{aligned}-x &= \sqrt[3]{4,6273} \quad \log(-x) = \frac{1}{3} \cdot 0,66533 = 0,22178 \\ &= \log 1,6663\end{aligned}$$

$$-x = 1,6664. \quad x = -1,6664.$$

**§ 120. Logarithmische Gleichungen.** Exponentialgleichungen (§ 75), bei welchen beide Gleichungsseiten sich nicht als Potenzen desselben Dignanden herstellen lassen, werden gelöst, indem man beiderseits den Logarithmus nimmt.

Beispiel 1.  $a^{mx} \cdot b^{nx} = c$

$$\begin{aligned}mx \log a + nx \log b &= \log c \\ x &= \frac{\log c}{m \log a + n \log b}.\end{aligned}$$

Voraussetzung hierfür ist, daß beide Gleichungsseiten logarithmable Ausdrücke sind.

Beispiel 2.  $a^{x+m} + b^x = b^{x+n} - a^x$

$$\begin{aligned}a^x \cdot (a^m + 1) &= b^x (b^n - 1) \\ x &= \frac{\log(b^n - 1) - \log(a^m + 1)}{\log a - \log b}\end{aligned}$$



## XV. Reihen.

**§ 121. Arithmetische Reihe** heißt eine Aufeinanderfolge von Zahlen mit fester Differenz. Das erste Glied sei bezeichnet mit  $a$ , die Differenz mit  $d$  und das  $n^{\text{te}}$  Glied mit  $t_n$ , so ist das allgemeine Bild einer arithmetischen Reihe,

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad t_n = a + (n - 1)d. \quad (60)$$

**§ 122. Summe der arithmetischen Reihe** von  $n$  Gliedern:

$$s_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d)$$

oder  $s_n = t_n + (t_n - d) + (t_n - 2d) + \dots + (t_n - (n - 1)d).$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$s_n = \frac{1}{2} n (a + t_n) \quad (61)$$

**§ 123. Geometrische Reihe** heißt eine Aufeinanderfolge von Zahlen mit festem Verhältniß ( $q$ ). Allgemeines Bild der geometrischen Reihe:

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \dots \quad t_n = aq^{n-1} \quad (62)$$

**§ 124. Summe der geometrischen Reihe** von  $n$  Gliedern:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

$$s_n \cdot q = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich:

$$s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q \cdot t_n - a}{q - 1} \quad (63)$$

**§ 125. Unendliche geometrische Reihe.** Ist  $q < 1$  d. h. die geometrische Reihe fallend, so wird  $q^n$  mit wachsender Gliederzahl immer kleiner, nähert sich somit der Null. Es nähert sich also die Summe einer solchen Reihe dem Ausdruck:

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine Brüche:

$$0,33 \dots = \frac{0,3}{1 - 0,1} = \frac{1}{3} \quad 0,6363 \dots = \frac{0,63}{1 - 0,01} = \frac{7}{11}.$$



**§ 126. Zinseszinsrechnung.** Wenn ein Kapital  $c$  zu  $p$  Prozent ( $\%$ ) steht, und die Zinsen immer wieder zum Kapital geschlagen werden, so sagt man: das Kapital steht auf Zinseszins. Das Kapital wächst in jedem Jahre nach dem gleichen Verhältnis:

$$(100 + p) : 100 = 1 + \frac{p}{100}.$$

Dieses Verhältnis heißt der Zinsfaktor ( $q$ ). Es sind demnach die einzelnen Kapitalbestände:

|                          |              |             |
|--------------------------|--------------|-------------|
| Anfangskapital           | $c$          |             |
| Kapital nach einem Jahr  | $cq$         |             |
| Kapital nach zwei Jahren | $cq^2$       |             |
| Kapital nach $n$ Jahren  | $s = cq^n$ . | <b>(64)</b> |

Wenn das Kapital alljährlich um  $p$  Prozent abnimmt, so ist der Zinsfaktor:

$$q = 1 - \frac{p}{100}$$

**§ 127.** Eine nach  $n$  Jahren zahlbare Summe ( $s$ ) hat heute nur den Wert eines Kapitals ( $c$ ), welches samt seinen Zinseszinsen sich in  $n$  Jahren auf genannte Summe erhöht. Dieses Kapital heißt der Barwert der betreffenden Summe. Derselbe ist (bei dem Zinsfaktor  $q$ )

$$c = \frac{s}{q^n}.$$

Nach der Diskontrechnung wird der bare Wert berechnet durch einen prozentualen Abzug, welcher von der fraglichen Summe gemacht wird. Der so gefundene Barwert ist kleiner als der nach obiger Formel.

**§ 128.** Sind nicht ganzjährige, sondern etwa vierteljährige Zinstermine vereinbart, so ist zu unterscheiden:

1) Die gemeine Art, nach welcher der vierteljährige Zinsfuß als der vierte Teil des Jahreszinsfußes genommen wird. ( $4\%$  ganzjährig gleich  $1\%$  vierteljährig.) Diese Art giebt eine größere Endsumme als bei ganzjährigen Zinstermen. Oder

2) Die strenge Art. Heißt der vierteljährige Zinsfaktor  $q'$ , so soll

$$cq'^4 = cq \quad \text{also } q' = \sqrt[4]{q}.$$



Die auf diese Weise berechnete Endsumme ist gleich der bei ganzjährigen Zinsterminen.

4<sup>0</sup>/<sub>0</sub> ganzjährig ist gleich 0,985<sup>0</sup>/<sub>0</sub> vierteljährig; 1<sup>0</sup>/<sub>0</sub> vierteljährig ist gleich 4,06<sup>0</sup>/<sub>0</sub> ganzjährig.

Für halbjährige oder monatliche Zinstermine ebenso.

**§ 129. Annuitäten.** Eine am Ende eines jeden Jahres fällige Summe (a), welche nur eine bestimmte Anzahl (n) von Jahren gezahlt wird, heißt eine Annuität.

1) Endwert (e) ist die Summe, auf welche die Annuität am Ende der n Jahre mit Zinseszinsen angewachsen ist.

$$e = aq^{n-1} + aq^{n-2} + \dots + aq + a = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

2) Barwert (b) ist der Wert, welchen die Annuität am Anfang des ersten Jahres hat.

$$\begin{aligned} b &= \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \dots + \frac{a}{q^n} = \frac{a}{q} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} \\ &= a \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)}. \end{aligned}$$

Es muß

$$b \cdot q^n = e.$$

Die Annuitäten dienen zur Heimzahlung von Darlehen; die anfängliche Schuld ist der Barwert der Annuität. — Die Annuitäten kommen auch unter dem Namen Renten vor; Rente ist eine von einem Kapital fließende Nutzung, welche das Kapital allmählig aufzehrt; der Barwert der Annuität bez. Rente ist das Kapital, aus welchem die Rente fließt. — Lebensversicherungsprämien sind Annuitäten auf Lebenszeit; das beim Tode des Versicherten auszahlende Kapital ist der Endwert der Annuität; die Anzahl der Jahre ist die wahrscheinliche (durchschnittliche) Lebensdauer des Versicherten.

Bei vierteljährigen Terminen ist der vierteljährige Betrag der Annuität der vierte Teil der ganzjährigen. Die Bestimmung des Zinsfaktors kann nach § 128 auf zweifache Art geschehen und sind hiernach auch die Resultate verschieden. — Bei halbjährigen oder monatlichen Annuitäten entsprechend.

Wenn die Annuitäten am Anfang des Jahres zahlbar sind, ist

$$e = aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad b = a \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1} (q - 1)}$$



## XVI. Kombinatorik.

**§ 130.** Stellt man eine Anzahl von Dingen — Elementen — zusammen, so heißen dieselben in ihrer ursprünglichen Anordnung die Grundform, z. B. die sieben Buchstaben

a b c d e f g.

Jedes in der Grundform spätere Element heißt höher, jedes frühere niedriger.

Aus einer gegebenen Grundform lassen sich auf dreifache Art neue Formen ableiten:

1) Man nimmt immer sämtliche Elemente nur in verschiedener Ordnung; dies heißt permutieren. Permutationen obiger Grundform sind z. B.

d a c f e g b      g f a c b d e      u. s. w.

2) Man nimmt immer nur eine bestimmte Anzahl von Elementen (zwei, drei u. s. w.) doch in unveränderter Ordnung; dies heißt kombinieren — mit oder ohne Wiederholung, je nachdem die Wiederholung desselben Elements gestattet ist oder nicht. — Die Kombinationen zu zweien heißen zur zweiten Klasse, die zu dreien zur dritten Klasse u. s. w. Z. B. aus obiger Grundform ergeben sich Kombinationen

ohne Wiederholung, zur zweiten Klasse: ab, cg, bf.

„ „ „ dritten „ : abc, beg, cdf.

mit Wiederholung, zur zweiten Klasse: aa, ab, bb, cf.

„ „ „ dritten „ : aaa, aab, cef, egg.

3) Man nimmt eine beschränkte Anzahl von Elementen, gestattet aber auch die Veränderung der Ordnung; dies heißt variieren — mit oder ohne Wiederholung, zur zweiten, dritten Klasse u. s. w. Die Variationen schließen die Kombinationen in sich; sie sind die Permutationen der Kombinationen.

Aus obiger Grundform ergeben sich Variationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse: ab, af, ba, db, gf.

„ „ „ dritten „ : abc, adb, bag, gcf.

mit Wiederholung zur zweiten Klasse: aa, ba, bb, de.

„ „ „ dritten „ : aaa, bab, cea, fdf.

### § 131. Permutationen.

1) Grundform von zwei Elementen. ab.

Permutationen: ab, ba.

Anzahl der Permutationen:  $P_2 = 2$ .



2) Grundform von drei Elementen.  $abc$ .

Permutationen:  $\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$ .

$$P_3 = 3 \cdot 2 = 6.$$

3) Ebenso  $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ .  $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ .

Allgemein  $P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

Eine Faktorenreihe, welche mit einer ganzen Zahl beginnt und immer um eins fällt, herab bis zur Einheit, heißt Fakultät.

Bezeichnung der Fakultät:  $n!$  [gelesen „n Fakultät“].

Demnach  $P_n = n!$  (65)

**§ 132.** 1) Aufgabe. Aus der Grundform  $abcdefg$  zu bestimmen die 2626<sup>te</sup> Permutationsform.

Die Gesamtheit der Permutationsformen zerfällt in 7 Gruppen; in jeder derselben sind  $(6!)$  Formen.

$$2626 : 6! = 3. \text{ Rest } 466.$$

Die gesuchte Form ist demnach die 466<sup>te</sup> in der vierten Gruppe; sie beginnt also mit  $d$ .

$$466 : 5! = 3. \text{ Rest } 106.$$

Innerhalb dieser vierten Gruppe ist die gesuchte Form die 106<sup>te</sup> in der vierten Abteilung. Sie beginnt also mit  $de$ . U. s. w.

Die gesuchte Form ist  $degbcfa$ .

2) Aufgabe. Aus der Grundform  $abcdefg$  ist gebildet die Form  $dfagbec$ ; die wievielte Permutationsform ist dies?

Es gehen voraus die Gruppen, welche mit  $a$ , mit  $b$ , mit  $c$  beginnen, d. h.  $3 \cdot 6! = 2160$  Formen.

In der vierten Gruppe gehen voraus die Abteilungen, welche mit  $da$ , mit  $db$ , mit  $dc$ , mit  $de$  beginnen, d. h.  $4 \cdot 5! = 480$  Formen. U. s. w.

Die gesuchte Form ist die 2660<sup>te</sup> Form.

**§ 133.** Wenn in einer Grundform von  $n$  Elementen dasselbe Element  $p$  mal vorkommt, so bilden die  $(p!)$  Permutationen dieser gleichen Elemente nur je eine Permutationsform. Es ist daher die Anzahl der Permutationen:

$$P_n^p = \frac{n!}{p!} \quad (66)$$

Desgleichen, wenn in der Grundform von  $n$  Elementen



eine Gruppe von  $p$  gleichen Elementen, eine Gruppe von  $q$ , eine Gruppe von  $r$  gleichen Elementen vorkommt:

$$P_n^{p, q, r} = \frac{n!}{p! q! r!}$$

**§ 134. Determinanten.** Wir entwerfen das Schema:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{array}$$

Diese 25 Elemente bedeuten ebensoviele von einander unabhängige Zahlen. Unter der Determinante fünften Grads, welche zu diesem Schema gehört, verstehen wir ein Aggregat, dessen einzelne Glieder nach folgendem Gesetze gebildet werden:

1) Die Glieder selbst sind Produkte aus je fünf Elementen des Schemas, welche derart zusammengestellt sind, daß jede Zeile und jede Spalte in jedem Glied einmal vertreten ist.

Ein erstes Glied (Anfangsglied) ist demnach das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale:

$$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5.$$

Aus diesem Anfangsglied ergeben sich alle andern Glieder, wenn man entweder die Zeiger oder die Buchstaben permutiert.

Die Anzahl der Glieder ist demnach  $P_5 = 5! = 120$ .

2) Das Vorzeichen der Glieder ist positiv oder negativ, je nachdem in demselben die Anzahl der Inversionen grade ist oder ungrade. Inversion nennt man die Stellung eines höheren Elementes vor einem niedrigeren.

Z. B. 6<sup>tes</sup> Glied: —  $a_1 b_2 c_5 d_4 e_3$  oder —  $a_1 b_2 e_3 d_4 c_5$ . Inversionen 5 (e) vor 4 (d), 5 (e) vor 3 (c), 4 (d) vor 3 (c).

31<sup>tes</sup> Glied: +  $a_2 b_3 c_1 d_4 e_5$  oder +  $b_1 c_2 a_3 d_4 e_5$ . Zahl der Inversionen 2.

73<sup>tes</sup> Glied: —  $a_4 b_1 c_2 d_3 e_5$  oder —  $d_1 a_2 b_3 c_4 e_5$ . Zahl der Inversionen 3.

Diese Darstellungsweise der Determinanten heißt die independente Form. Die in § 59 gegebene Darstellung heißt die rekurrierende Form.

Man beweise z. B. für Determinanten dritten, vierten, fünften Grads die thatsächliche Uebereinstimmung dieser beiden Darstellungsweisen.

Den allgemeinen Beweis dieser Übereinstimmung siehe in der bei § 59 angezeigten Schrift des Verfassers.



### § 135. Kombinationen ohne Wiederholung.

1) Zur zweiten Klasse (Amben). Grundform abcdefg.

|        |     |     |     |     |     |      |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Amben: | a b | b c | c d | d e | e f | f g. |
|        | a c | b d | c e | d f | e g |      |
|        | a d | b e | c f | d g |     |      |
|        | a e | b f | c g |     |     |      |
|        | a f | b g |     |     |     |      |
|        | a g |     |     |     |     |      |

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der Amben: } K_7^2 &= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ &= \frac{6}{2} (6 + 1) = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \end{aligned}$$

$$\text{Allgemein. } K_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n!}{2! (n-2)!} \quad (67)$$

2) Zur dritten Klasse (Ternen). Man setze das erste Element allen Amben vor, welche sich aus den nachfolgenden Elementen bilden lassen; ebenso das zweite, dritte u. s. f. bis zum drittletzten.

Für eine Grundform von 7 Elementen ist daher die Anzahl der Ternen:

$$\begin{aligned} K_7^3 &= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot [6 \cdot 5 \cdot (7-4) + 5 \cdot 4 \cdot (6-3) + 4 \cdot 3 \cdot (5-2) \\ &\quad + 3 \cdot 2 \cdot (4-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3] \end{aligned}$$

Nach Auflösung der Klammern ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_7^3 &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \\ K_n^3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n!}{3! (n-3)!} \quad (68) \end{aligned}$$

3) Zur vierten ....  $p^{\text{ten}}$  Klasse.

$$\begin{aligned} K_n^4 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n!}{4! (n-4)!} \\ K_n^p &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(p-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \frac{n!}{p! (n-p)!} \end{aligned}$$

Bildet man aus einer Grundform von  $n$  Elementen eine Kombinationsform zur  $p^{\text{ten}}$  Klasse, so bilden die weggelassenen Elemente zugleich eine Kombinationsform zur  $(n-p)^{\text{ten}}$  Klasse. Es muß daher:

$$K_n^p = K_n^{n-p},$$

wie sich auch aus obiger Formel ergibt.



Unter Kombinationen zur ersten Klasse hat man daher die einzelnen Elemente selbst zu verstehen.

$$K_n^1 = K_n^{n-1} = n.$$

### § 136. Kombinationen mit Wiederholung.

1) Zur zweiten Klasse. Grundform a b c d e

Kombinationsformen:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| a a | b b | c c | d d | e e |
| a b | b c | c d | d e |     |
| a c | b d | c e |     |     |
| a d | b e |     |     |     |
| a e |     |     |     |     |

Anzahl der Kombinationen:

$$K_5'^2 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}.$$

$$K_n'^2 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \quad (69)$$

2) Zur dritten Klasse. Man setze das erste Element allen Kombinationsformen zur zweiten Klasse vor, welche sich aus diesem und den nachfolgenden Elementen bilden lassen; ebenso mit dem zweiten, dritten, bis letzten Element.

Für eine Grundform von fünf Elementen ist daher die Anzahl der Formen:

$$K_5'^3 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{vergl. (§ 135,2).}$$

$$K_n'^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad (70)$$

3) Zur vierten . . . . .  $p^{\text{ten}}$  Klasse.

$$K_n'^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$K_n'^p = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+(p-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$$

### § 137. Variationen ohne Wiederholung.

1) Zur zweiten Klasse. Man stellt jedes Element mit jedem der andern Elemente zusammen.

Grundform: a b c d e.

Variationsformen:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| a b | b a | c a | d a | e a |
| a c | b c | c b | d b | e b |
| a d | b d | c d | d c | e c |
| a e | b e | c e | d e | e d |



Anzahl der Formen:  $V_n^2 = n \cdot (n - 1).$  **(71)**

2) Zur dritten, vierten ...  $p^{\text{ten}}$  Klasse. Man stellt jedes Element zusammen mit den Variationsformen zur zweiten u. s. w. Klasse aus den übrigen Elementen.

$$V_n^3 = n (n - 1) (n - 2) \quad \textbf{(72)}$$

$$V_n^4 = n (n - 1) (n - 2) (n - 3)$$

$$V_n^p = n (n - 1) (n - 2) \cdots (n - (p - 1)).$$

Bildet man aus einer Grundform von  $n$  Elementen die Kombinationsformen ohne Wiederholung zur  $p^{\text{ten}}$  Klasse, und permutiert jede dieser Formen, so erhält man die betreffenden Variationen. Es muß demnach:

$$K_n^p \cdot P_p = V_n^p,$$

was die Formeln bestätigen.

### § 138. Variationen mit Wiederholung.

1) Zur zweiten Klasse. Man stellt jedes Element mit sich und jedem andern zusammen. Anzahl der Variationsformen:

$$V_n'^2 = n^2 \quad \textbf{(73)}$$

2) Zur dritten ...  $p^{\text{ten}}$  Klasse — entsprechend —

$$V_n'^3 = n^3 \quad \textbf{(74)}$$

$$V_n'^p = n^p.$$

### § 139. Binomialsatz. Es sei zu bilden:

$$(a + b)^7.$$

Wir entwickeln diese Potenz als Produkt:

$$(a + b)^7 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b).$$

Führt man die Rechnung aus, so ergeben die Glieder die Variationen der Grundform ab mit Wiederholung zur siebenten Klasse. Die Gesamtzahl der Glieder ist daher

$$V_7'^7 = 2^7 (= 128).$$

Unter diesen Gliedern sind immer diejenigen, welche nur Permutationen von einander sind, einander gleich. Wir bilden daher statt der Variationen mit Wiederholung die Kombinationen mit Wiederholung und setzen jedem Glied die betreffende Permutationszahl als Faktor bei. Die Anzahl der Glieder ist jetzt:

$$K_2'^7 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 8.$$



$$\begin{aligned}
(a+b)^7 &= aaaaaaa \cdot \frac{7!}{7!} + aaaaaab \cdot \frac{7!}{6!} + aaaaabb \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} \\
&\quad + aaaabbb \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} + aaabbbb \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} + aabbbbb \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} \\
&\quad + abbbbbb \cdot \frac{7!}{6!} + bbbbbbb \cdot \frac{7!}{7!} \\
&= \frac{7!}{7!} a^7 + \frac{7!}{6!} a^6 b + \frac{7!}{5! \cdot 2!} a^5 b^2 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} a^4 b^3 \\
&\quad + \frac{7!}{3! \cdot 4!} a^3 b^4 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} a^2 b^5 + \frac{7!}{6!} a b^6 + \frac{7!}{7!} b^7 \\
&= a^7 + 7 a^6 b + 21 a^5 b^2 + 35 a^4 b^3 + 35 a^3 b^4 \\
&\quad + 21 a^2 b^5 + 7 a b^6 + b^7.
\end{aligned}$$

Zur Probe: Es muß die Summe der Faktoren der einzelnen Glieder gleich der Gesamtgliederzahl ( $2^7$ ) sein.

Allgemein:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \frac{n!}{n!} a^n + \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1} b + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} a^{n-2} b^2 + \dots \\
&\quad + \dots + \frac{n!}{2! (n-2)!} a^2 b^{n-2} + \frac{n!}{(n-1)!} a b^{n-1} + \frac{n!}{n!} b^n \quad (75)
\end{aligned}$$

Gesamtgliederzahl:  $V_2^n = 2^n$ .

Wirkliche Gliederzahl:  $K_2^n = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = n + 1$ .

Zur Probe muss:

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + \dots + \frac{n!}{2! (n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \\
+ \frac{n!}{n!} = 2^n.
\end{aligned}$$

Für die Faktoren der Glieder hat man auch die Bezeichnung

$$\frac{n!}{2! (n-2)!} = \binom{n}{2}, \quad \text{und} \quad \frac{n!}{p! (n-p)!} = \binom{n}{p},$$

sowie die Benennung  $2^{\text{ter}}$ ,  $p^{\text{ter}}$  Binomialkoeffizient von  $n$ .

Die Potenz eines Polynoms wird ähnlich behandelt.

Beispiel.  $(a + b + c + d)^5$ .

Gesamtgliederzahl:  $V_4^5 = 4^5 = 1024$ .

Wirkliche Gliederzahl:  $K_4^5 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$ .



$$\begin{aligned}
 (a+b+c+d)^5 = & \frac{5!}{5!} a^5 \\
 & + \frac{5!}{4!} a^4 b + \cdots \frac{5!}{4!} a^4 d \\
 & + \frac{5!}{3! \cdot 2!} a^3 b^2 + \frac{5!}{3!} a^3 b c + \cdots \frac{5!}{3! \cdot 2!} a^3 d^2 \\
 & + \frac{5!}{2! \cdot 3!} a^2 b^3 + \frac{5!}{2! \cdot 2!} a^2 b^2 c + \cdots \frac{5!}{2! \cdot 2!} a^2 b c^2 \\
 & \quad + \frac{5!}{2!} a^2 b c d + \cdots \frac{5!}{2! \cdot 3!} a^2 d^3 \\
 & + \frac{5!}{4!} a b^4 + \frac{5!}{3!} a b^3 c + \cdots \frac{5!}{2!} a b^2 c d + \cdots \frac{5!}{4!} a d^4 \\
 & + \frac{5!}{5!} b^5 + \cdots \frac{5!}{5!} d^5.
 \end{aligned}$$

Die Summe der Faktoren muß  $4^5 = 1024$  betragen.

**§ 140. Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Das Verhältnis der Anzahl der einem zu erwartenden Ereignis günstigen Fälle zur Anzahl der möglichen Fälle heißt die **Wahrscheinlichkeit** ( $w$ ) dieses Ereignisses.

Die geringste Wahrscheinlichkeit ist null d. i. die Unmöglichkeit; die größte Wahrscheinlichkeit ist eins d. i. die Gewißheit.

Beispiel 1. Spiel mit einem Würfel.

Mögliche Fälle: 6.

a) Wahrscheinlichkeit die Zahl 4 zu werfen?

Günstige Fälle: 1.  $w = \frac{1}{6}$ .

b) Wahrscheinlichkeit eine grade Zahl zu werfen?

Günstige Fälle: 3.  $w = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

c) Wahrscheinlichkeit die Zahl 7 zu werfen?

Günstige Fälle: 0.  $w = \frac{0}{6} = 0$  (Unmöglichkeit).

d) Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen 1 bis 6 zu werfen?

Günstige Fälle: 6.  $w = \frac{6}{6} = 1$  (Gewißheit).

Die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen eines Ereignisses heißt die **Gegenwahrscheinlichkeit** ( $w'$ ). Es muß

$$w + w' = 1.$$

Wetten über das Eintreffen von Ereignissen (Lotterien) müssen



im Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und Gegenwahrscheinlichkeit stehen.

Beispiel 2. Spiel mit drei Würfeln.

Mögliche Fälle:  $V^3 = 6^3 = 216$ .

- a) Wahrscheinlichkeit drei gleiche Zahlen zu werfen?

Günstige Fälle: 6.  $w = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ .

- b) Wahrscheinlichkeit zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Günstige Fälle: 90 nämlich Wurf 1, 1, 2 — dreimal,

1, 1, 6 — „  
2, 2, 1 — „  
u. s. w.

$$w = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}.$$

- c) Wahrscheinlichkeit die Summe zehn zu werfen?

Günstige Fälle: 27 nämlich Wurf 6, 3, 1 — sechsmal,

„ 6, 2, 2 — dreimal,

„ 5, 4, 1 — sechsmal,

„ 5, 3, 2 — sechsmal,

„ 4, 4, 2 — dreimal,

„ 4, 3, 3. dreimal.

$$w = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 3. Spiel mit 36 Karten, aus welchen drei gezogen werden.

Mögliche Fälle:  $V^3 = 36 \cdot 35 \cdot 34$ .

- a) Wahrscheinlichkeit die Herz-Aß zu ziehen?

Günstige Fälle:  $3 \cdot V^2_{35} = 3 \cdot 35 \cdot 34$ .  $w = \frac{3 \cdot 35 \cdot 34}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{1}{12}$ .

- b) Wahrscheinlichkeit drei Assen zu ziehen?

Günstige Fälle:  $V^3_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ .  $w = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{1}{1785}$ .

- c) Wahrscheinlichkeit drei Herzkarten zu ziehen?

Günstige Fälle:  $V^3_9 = 9 \cdot 8 \cdot 7$ .  $w = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{1}{85}$ .

u. s. w.



# Inhaltsverzeichnis.

## Erste Abteilung.

Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten.

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| I. Einleitung . . . . .                                      | 1  |
| II. Addition . . . . .                                       | 1  |
| III. Subtraktion . . . . .                                   | 2  |
| IV. Multiplikation . . . . .                                 | 6  |
| V. Division . . . . .                                        | 10 |
| VI. Lineäre Gleichung mit einer Unbekannten . . . . .        | 18 |
| VII. Proportionen . . . . .                                  | 23 |
| VIII. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . . . . | 25 |

## Zweite Abteilung.

Dritte Stufe der Rechnungsarten.

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| IX. Überblick der Rechnungsarten der dritten Stufe . . . . .      | 35 |
| X. Potenzen . . . . .                                             | 36 |
| XI. Wurzeln . . . . .                                             | 41 |
| XII. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .     | 48 |
| XIII. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . . . . | 55 |
| XIV. Logarithmen . . . . .                                        | 59 |
| XV. Reihen . . . . .                                              | 64 |
| XVI. Kombinatorik . . . . .                                       | 67 |

## B e r i c h t i g u n g.

Seite 41, Zeile 3 von unten: statt  $z^{\frac{3}{4}}$  zu lesen  $z^{\frac{4}{3}}$   
 „ „ „ 3 „ „ „  $y^{-\frac{4}{3}}$  „  $y^{-\frac{3}{4}}$







- Sickenberger**, Adolf, Professor am k. Luitpoldsgymnasium in München, Leitfaden der elementaren Mathematik. Zweiter Teil: Planimetrie. Dritter Teil: Stereometrie und Trigonometrie. (Be- findet sich unter der Presse.) Jeder Teil wird 5 bis 6 Bogen stark.
- , Leitfaden der Arithmetik nebst Übungsbeispielen. Vierte Auflage. IV u. 192 S. 8°. 1888. 1.60 *M*.
- , Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt. (Unter der Presse.)
- , Die Determinanten in genetischer Behandlung. Zur Ein- führung für Anfänger. Zweiter Abdruck. VII u. 80 S. 8°. 1887. 1.60 *M*.
- Günther**, Siegmund, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Ge- brauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vor- trägen. Zweite, durchaus umgearbeitete und vermehrte Auflage. XI u. 157 S. gr. 8° mit 52 Textillustrationen. 1886. 2 *M*.
- Knilling**, Rudolf, Zur Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen. Erste Abteilung: Mein Programm. — Kritik der Pestalozzischen, Grubischen und gegenwärtigen Rechenmethode. II u. 172 S. gr. 8°. 1884. 1.40 *M*.
- , Zweite Abteilung. Fortsetzung und Schluß des theoretischen Theiles. Beschreibung des Rechenstisches, Teillineals und verbesserten Zweifaches. Praktischer Teil. VII u. 268 S. gr. 8°. 1886. 3.60 *M*.
- Lüroth**, Jacob, Grundriss der Mechanik. IV u. 80 S. gr. 8°. 1881. 1.40 *M*.
- Rechnagel**, Georg, Ebene Geometrie für Schulen. Dritte, verbesserte Auflage. X u. 203 S. gr. 8° mit eingedr. Holzschn. 1885. 2 *M*.
- Schüler**, Wilh. Friedr., Neue Theorie des Imaginären in der Funktionen- rechnung und der analytischen Geometrie. Programm zu dem Jahres- berichte der K. bayerischen Realschule Freising pro 1877/78. Mit einer Tafel. II u. 56 S. 4°. 4 *M*.
- , Lehrbuch der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (projekti- vische Geometrie). Mit Übungsaufgaben. Mit vier Tafeln in Stein- druck. XI u. 247 S. gr. 8°. 1879. 4.80 *M*.
- Walberer**, Joh. Chr., Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Übungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und technischen Lehr- anstalten. Fünfte durchgesehene Auflage. VI u. 166 S. gr. 8°. Mit 50 Holzschnitten. 1885. 2.40 *M*.
- , Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Zweite Auflage. VIII u. 152 S. gr. 8°. 1884. 1.60 *M*.
- Wenz**, G., Zusammenstellung der wichtigsten arithmetischen und algebraischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel. Ein Handbüchlein für den Rechen-Unterricht.
- Erste Abteilung: Die Rechnungsarten für die Volks- und Mittelschulen ([IV u.] 32 S.) 8°. 1873. 30 *S*.
- Zweite Abteilung: Die Rechnungsarten für die höhern Lehranstalten. ([IV u.] 58 S.) 8°. 1873. 45 *S*.
- Jolly**, Jul., Ein Kapitel vergleichender Syntax. Der Conjunctiv und Optativ und die Nebensätze im Zend und Altpersischen in Ver- gleich mit dem Sanskrit und Griechischen. gr. 8°. 1872. Preis 2.40 *M*.
- , Geschichte des Infinitivs im Indogermanischen. gr. 8°. 1873. Preis 6 *M*.
- , Schulgrammatik und Sprachwissenschaft. Studien über die Neugestaltung des grammatischen Unterrichts nach den Ergebnissen und der Methode der vergleichenden Sprachwissenschaft. gr. 8°. 1874. Preis 1.60 *M*.



Sickenberger, Adolf

Leitfaden der elementaren Mathematik

Bd.: 1

1888

Math.p. 527 ne-1/3

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651709-1